Übungen zur Topologie — Blatt 7

Aufgabe 1 Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) X ist einfach zusammenhängend.

b) Je zwei Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \beta(0)$ und $\alpha(1) = \beta(1)$ sind homotop relativ $\{0,1\}$.

Aufgabe 2 Sei $\underline{\mathrm{Rng}}$ die Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen. Betrachten Sie die Zuordnung $C : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Rng}}$, die jedem topologischen Raum X den Raum der stetigen Funktionen $C(X, \mathbf{R})$ auf X zuordnet.

Seien X, Y topologische Räume. Ordnen Sie jeder stetigen Funktion $f : X \to Y$ einen Ringhomomorphismus $f^* = Cf : C(Y, \mathbf{R}) \to C(X, \mathbf{R})$ zu, so dass C damit ein contravarianter Funktor wird.

Aufgabe 3 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien X, Y Objekte in $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass Produkt, bzw. Summe von X und Y bis auf Isomorphie eindeutig sind, sofern sie existieren.

Aufgabe 4 Gegeben $n \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(n, \mathbf{R})$ eine Deformationsretrakt der linearen Gruppe $Gl(n, \mathbf{R})$ ist.

Hinweis: Eine Matrix liegt in $Gl(n, \mathbf{R})$ genau dann wenn die n-Spaltenvektoren den ganzen $\mathbf{R}^n$ aufspannen. Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren um diese Spaltenvektoren zu orthogonalisieren. Dies liefert eine Retraktion $r : Gl(n, \mathbf{R}) \to O(n, \mathbf{R})$. Zeigen Sie, dass r homotop zu $\mathrm{id}_{Gl(n,\mathbf{R})}$ ist.

Abgabe: Donnerstag, den 11.12.2008 vor der Vorlesung