Übungen zur Topologie — Blatt 8

Aufgabe 1 Sei X ein wegzusammenhängender Raum. Zeigen Sie, dass die Einhängung SX von X einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 Sei $B_g^2 \subset \mathbf{R}^2$ eine g-fach gelochte Kreisscheibe, dh.

$$B_g^2 = \bar{B}^2 \setminus (B_{\varepsilon_1}(p_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_g}(p_g))$$

mit $\varepsilon_i > 0$ und $\overline{B_{\varepsilon_i}(p_i)} \subset \bar{B}^2$, so dass $\overline{B_{\varepsilon_i}(p_i)} \cap \overline{B_{\varepsilon_j}(p_j)} = \emptyset$ für $i \neq j$. Der Raum $V_g := B_g^2 \times [0,1]$ wird *Henkelkörper* oder *Vollbrezel vom Geschlecht* g genannt.

a) Skizzieren Sie V_g.

b) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von V_g.

c) Begründen Sie, dass der Rand von V_g homöomorph zu F_g ist.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von N_g für $g \geq 1$.

Aufgabe 4 Sei $\underline{\mathrm{Grp}}$ die Kategorie der Gruppen und $\underline{\mathrm{Ab}}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Ist G eine Gruppe, so sei (G,G) die Kommutatoruntergruppe und $TG = G/(G,G)$. Ist H eine weitere Gruppe, und $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Setze $T\phi : TG \to TH : [g] \mapsto [\phi(g)]$ wobei $[g]$ bzw. $[\phi(g)]$ die Restklassen bzgl. (G,G) in G bzw. bzgl. (H,H) in H sind.

a) Zeigen Sie dass $T : \underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ damit ein Funktor wird, das *Abelschmachen* von Gruppen.

b) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche Menge und $F(A)$ die von A frei erzeugte Gruppe. Zeigen Sie, dass $T(F(A)) \cong \mathbf{Z}^n$.

c) Bestimmen Sie $T\pi_1(F_g)$ und folgern Sie, dass die F_g paarweise nicht homöomorph sind.

Abgabe: Donnerstag, den 18.12.2008 vor der Vorlesung