Mathematisches Institut der Universität Freiburg, Dr. J. Metzger 18.12.2008

Übungen zur Topologie — Blatt 9

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind freiwillig!

Aufgabe 1 Die Gruppe $\mathbf{Z}^n$ operiert auf $\mathbf{R}^n$ durch Translationen, via

$$\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n : (n, x) \mapsto x + n.$$

a) Zeigen Sie, dass dies eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenoperation ist.

b) Zeigen Sie, dass der Bahnenraum $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ homöomorph zu T^n ist.

Aufgabe 2 Sei $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} : (\lambda, z) \mapsto \lambda z,$$

wobei rechts die Vektorraummultiplikation gemeint ist. Zeigen Sie:

a) Dies ist eine Gruppenoperation. Der Quotient $\mathbf{C}P^n := \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbf{C}^*$ heißt der *komplex projektive Raum*.

b) $\mathbf{C}P^n$ ist eine kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeit.
Hinweis: Ist $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ die Einheitskugel und $S^1 \subset C^*$ die komplexen Zahlen von Betrag 1. Dann operiert S^1 auf S^{2n+1} vermöge $\lambda.z = \lambda z$, also vermöge der Einschränkung der obigen Gruppenoperation auf $S^{2n+1} \times S^1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}P^n \cong S^{2n+1}/S^1$.

c) $\mathbf{C}P^1 \cong S^2$.

Aufgabe 3 Konstruieren Sie eine zweiblättrige Überlagerung $\pi : T^2 \to N_2$ der Kleinschen Flasche N_2 durch den Torus T^2. Definieren Sie dazu eine eigentlich diskontinuierliche Operation von $\mathbf{Z}_2$ auf T^2.

Aufgabe 4 Sei X lokal wegzusammenhängend und $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bzw. $\pi' : (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ seien zwei Überlagerungen.

Eine stetige Abbildung $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ heißt *Überlagerungsmorphismus*, wenn gilt $\pi' \circ f = \pi$.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \arrow[dl, "\pi'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass f selbst eine Überlagerung ist.

Hinweis: Surjektivität von f sieht man wie folgt: Ist $\tilde{x}' \in \tilde{X}'$ und $\tilde{\alpha}'$ ein Weg von $\tilde{x}'_0$ zu $\tilde{x}'$. Setze $\alpha = \pi' \circ \tilde{\alpha}'$ und lifte dann α nach $\tilde{X}$.

Abgabe: Donnerstag, den 8.1.2009 vor der Vorlesung