Mathematisches Institut der Universität Freiburg, Dr. J. Metzger 15.1.2009

Übungen zur Topologie — Blatt 11

Aufgabe 1 Klassifizieren Sie alle Überlagerungen von $\mathbf{R}P^n$, $L(p,q)$ und T^n.

Aufgabe 2 Seien X und Y topologische Räume mit universellen Überlagerungen $\hat{\pi}_X : \hat{X} \to X$ bzw. $\hat{\pi}_Y : \hat{Y} \to Y$. Zeigen Sie, dass falls $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, eine Homotopieäquivalenz $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ existiert, so dass $\hat{\pi}_Y \circ \hat{f} = f \circ \hat{\pi}_X$ gilt.

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\hat{\pi}_X"'] & \hat{Y} \arrow[d, "\hat{\pi}_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Aufgabe 3 Sei G eine zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Gruppe mit universeller Überlagerung $\hat{\pi} : \hat{G} \to G$. Zeige Sie, dass $\hat{G}$ so mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen werden kann, dass $\hat{\pi}$ ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 4 *Hauptsatz der Galoistheorie für Überlagerungen.* Sei $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine reguläre Überlagerung. Eine Überlagerung $\pi' : (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ heißt *Teilüberlagerung*, wenn es einen Überlagerungsmorphismus $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ gibt.

Zeigen Sie, dass die Abbildung, die einer Teilüberlagerung $\pi' : (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ die Gruppe $\Gamma' = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, \tilde{X}')$ zuordnet, eine Bijektion von der Menge der Teilüberlagerungen in die Menge der Untergruppen von $\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ ist.

Abgabe: Donnerstag, den 22.1.2009 vor der Vorlesung