Übungen zur Topologie — Blatt 12

Aufgabe 1 Zeigen Sie:

a) Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen bilden eine Kategorie $\underline{\mathrm{KK}}$.

b) Für alle $k \in \mathbf{Z}$ ist die Homologie H_k ein Funktor von $\underline{\mathrm{KK}}$ in die Kategorie der abelschen Gruppen $\underline{\mathrm{Ab}}$.

c) Für zwei Kettenkomplexe $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ gilt, dass

$$H_k(\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}') \cong H_k(\mathcal{C}) \oplus H_k(\mathcal{C}').$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Die Sequenz spaltet.

b) Es gibt einen Isomorphismus $\phi : A \oplus C \to B$ mit $f(a) = \phi(a, 0)$ und $g \circ \phi(a, c) = c$ für alle $a \in A, c \in C$.

c) f hat ein Linksinverses.

Aufgabe 3 Sei $0 \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Zeigen Sie die Exaktheit der langen exakten Sequenz aus Satz 9.10 an den Stellen $H_{k+1}(\mathcal{C})$ und $H_k(\mathcal{C}'')$.

Aufgabe 4 Das Fünferlemma der Homologietheorie. Sind die Zeilen des folgenden kommutativen Diagramms exakt, und die vertikalen Homomorphismen $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$ jeweils Isomorphismen, so ist auch ϕ_3 ein Isomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4"] & A_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Abgabe: Donnerstag, den 27.1.2009 vor der Vorlesung