Übungen zur Topologie — Blatt 13

Letztes Blatt!

Aufgabe 1 Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ Kettenkomplexe und $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ bzw. $f', g' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ Kettenabbildungen. Es sei $f \simeq g$ und $f' \simeq g'$. Zeigen Sie, dass $f' \circ f \simeq g' \circ g$ ist.

Aufgabe 2 Sei X ein topologischer Raum, $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex und $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbf{Z}$ der Homomorphismus, für den $\varepsilon(x) = 1$ für jeden singulären 0-Simplex $x \in S_0(X)$ gilt. Wir definieren einen Kettenkomplex $\tilde{S}(X)$ durch $\tilde{S}_k(X) = S_k(X)$ und $\tilde{\partial}_k = \partial_k$ für $k \geq 1$ und $\tilde{S}_0(X) = \ker \varepsilon$. $\tilde{S}(X)$ heißt der *reduzierte singuläre Kettenkomplex*. Zeigen Sie:

a) $\tilde{S}(X)$ ist ein Kettenkomplex.

b) Für $k \geq 1$ gilt $H_k(X) \cong \tilde{H}_k(X)$.

c) $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}$.

Aufgabe 3 Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist $S(A)$ ein Teilkomplex von $S(X)$. Wir definieren den *relativen Kettenkomplex* $S(X, A) := S(X)/S(A)$ *des Raumpaares* (X, A). Die Homologiegruppen

$$H_k(X, A) := H_k(S(X, A)).$$

von $S(X, A)$ heißen die *relativen singulären Homologiegruppen des Raumpaares* (X, A).

Zeigen Sie: Es existiert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen wie folgt

$$\xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_*}$$

Aufgabe 4 Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $H_k(X, A)$ wie in Aufgabe 3 definiert. Zeigen Sie:

a) $H_k(X, X) = 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$.

b) $H_k(X, \emptyset) = H_k(X)$ für alle $k \in \mathbf{N}$.

c) Ist X wegzusammenhängend und $A \neq \emptyset$, so ist $H_0(X, A) = 0$.

Abgabe: Donnerstag, den 5.2.2009 vor der Vorlesung