Übungen zur Topologie — Blatt 14

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Homologie folgender Räume:

a) $\bigvee_{i=1}^{k} S^n$

b) F_g

c) N_g

d) $\mathbf{R}P^n$

Aufgabe 2 Sei X ein topologischer Raum, $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex und $B : S(X) \to S(X)$ der baryzentrische Unterteilungsoperator. Zeigen Sie:

a) $u_k = C_{p_k}(B_{k-1}\partial \operatorname{id}_{\Delta_k})$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Die Bezeichnungen sind wie in Definition 10.18.

b) $B : S(X) \to S(X)$ ist eine Kettenabbildung.

c) Ist $A \subset X$ und $c \in S_k(A)$ so ist $B_k c \in S(A)$.

d) Ist z ein k-Zykel relativ A, dh. es existiert $c \in S_{k+1}(X)$ mit $\partial c = z + a$ wobei $a \in S(A)$, so ist $B_k z$ auch ein Zykel relativ A und $B_k z - z \in S_k(A)$. Insbesondere ist dann $[Bz] = [z] \in H_k(X, A)$.

Aufgabe 3 Beweisen Sie den Homotopiesatz für die relative Homologie. Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop als Abbildungen von Raumpaaren, dh. existiert eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \to Y$ mit $H(A \times [0, 1]) \subset B$, $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = g$, so stimmen die von f und g induzierten Abbildungen überein, $f_* = g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$.

Abgabe: keine