Blatt 10

Abgabe am 08.01.2019 vor 10 Uhr

Definiton (Forcingsprache)**.** Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung. Die Menge $\{\varphi(\bar{\tau}) : \varphi \in \mathcal{L}(\in), \bar{\tau} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}\}$ wird *Forcingsprache* und ihre Elemente werden *Sätze der Forcingsprache* genannt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien M ein ctm, $\mathbb{P} \in M$ eine atomlose Halbordnung (vgl. Blatt 9 Aufgabe 4) und G, H zwei verschiedene $\mathbb{P}$-generische Filter über M. Kann es einen Satz φ aus der Forcingsprache geben, so dass $M[G] \models \varphi$ und $M[H] \models \neg\varphi$?
Falls ja, geben Sie φ an. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Vorspann zur Aufgabe 2: Sei M ein ctm. Wir schreiben ω_n^M für das Element $x \in \mathbf{V}$, so dass $M \models x = \omega_n$. Überlegen Sie sich, dass x eine Ordinalzahl ist. Wir definieren in M eine Halbordnung

$$\mathbb{P} := \mathrm{Coll}(\omega^M, \omega_1^M) = \mathrm{Fn}(\omega^M, \omega^M, \omega_1^M) := \{p \in M \ : \ (\exists A \subseteq \omega \text{ endlich} \wedge p : A \to \omega_1)^M\},$$

die durch $q \leq p :\Leftrightarrow q \supseteq p$ geordnet ist. Diese Forcinghalbordnung wird auch *Lévy-Kollaps von* ω_1 genannt. Sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M. Wir setzen $f_G := \bigcup\{p \in \mathbb{P} \ : \ p \in G\} = \bigcup G$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Zeigen Sie:

i) f_G ist ein Element von $M[G]$.

ii) Es gibt einen $\mathbb{P}$-Namen τ, so dass für jeden generischen Filter G über $\mathbb{P}$ gilt: $\mathrm{val}(\tau, G) = f_G$. Wir bezeichnen τ mit $\dot{f}_G$.

iii) $M[G] \models f_G$ ist eine Funktion.

iv) $M[G] \models \mathrm{dom}(f_G) = \omega$. Schließen Sie daraus, dass $\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{dom}(\dot{f}_G) = \check{\omega}$ gilt.

v) $M[G] \models \mathrm{rng}(f_G) = \omega_1^M$. Wie lautet nun die entsprechende Formulierung in der Forcingsprache?

vi) Ist $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, oder gilt $\omega_1^M < \omega_1^{M[G]}$ oder $\omega_1^M > \omega_1^{M[G]}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

vii) Eine der drei Möglichkeiten kann bei keinem Forcing vorkommen. Welche? Warum?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei M ein ctm und $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \omega, 2) = \{p : (\exists A \subseteq \omega, A \text{ endlich})(p \colon A \to 2)\}$. Zeigen Sie, dass es einen Filter G über $\mathbb{P}$ gibt, so dass für jedes transitive $N \supseteq M$ gilt: Falls $G \in N$ und $\mathbf{On} \cap N = \mathbf{On} \cap M$, so erfüllt N nicht ZFC.

Hinweis: Die Generizät ist nicht gefordert. Der Filter G könnte eine Wohlordnung auf ω kodieren vom Ordnungstyp $\geq \mathbf{On} \cap M$. Warum gibt es so eine lange Wohlordnung auf ω? Wie kann man diese in einem Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ kodieren?

BONUS (2 Punkte)**.** Seien $M, \mathbb{P}, G$ wie in Aufgabe 2. Gilt $M[G] \models \omega_2^M \geq \omega_1$?