SEMINAR MENGENLEHRE WS 10/11: VORTRAGSTHEMEN MIT QUELLENANGABEN TOPICS OF TALKS

HEIKE MILDENBERGER

1. Die Lehrbücher und zwei Skripten

Jech: Thomas Jech, Set Theory. The Third Millenium Edition, 2003.
Kanamori: Akihiro Kanamori: The Higher Infinite. 2nd edition 1998.
Kunen: Kenneth Kunen: Set Theory, An Introduction to Independence Proofs. 1980
Levy: Azriel Levy, Basic Set Theory, 1978.
Mildenberger: Mengenlehre 2, Wien 2005.
Todorcevic: Stevo Todorcevic: Walks on Ordinals and Their Characteristics, 2007.
Ziegler: Skript Mengenlehre

2. Die Vortragsthemen

Bemerkung: (4), (8), (9) zitieren (3). Sonst sind die Themen weitgehend unabhängig.

(0) (*Mögliches Datum 19.10.2010*) Wiederholung zu Kardinalzahlen und Mächtigkeiten. Begründung ihrer Existenz aus ZFC. Eigenschaften von Nachfolgern und von Mächtigkeiten von Potenzmengen. Flum Skript Mengenlehre. Ziegler Skript Math Logik

(1) (*Mögliches Datum 26.10.2010*) Der Satz von Ramsey. Einführung der ungarischen Pfeilnotation.

Quellen Jech 9.1, Levy, Theorem IX 3.1, Levy Theorem IX 2.17 (Ableitung aus Königs Lemma), Anhang zu Shelah's Classification Theory, Gowers, William Timothy Gowers, Ramsey Methods in Banach Spaces, Handbook of the Geometry of Banach Spaces vol 2, ed. by William B. Johnson and Joram Lindenstruss, 2003, Elsevier Science, pages 1071 - 1097, Theorem 1.1.

Der Satz von Ramsey gilt nicht für $\aleph_1$: Es gibt einen Aronszajnbaum (einen Baum der Höhe $\aleph_1$ der Breite $\aleph_0$ ohne $\aleph_1$-langen Ast).

Levy Theorem IX 2.20, Jech Theorem 9.16, Ziegler 11.2

Eventuell: Speckers Satz: $2^{<\kappa} = \kappa$ impliziert, dass es einen κ^+-Aronszajnbaum gibt.

Date: August 28, 2010.

Kanamori 7.10

(2) (*Mögliches Datum 2.11.2010*) Zu welchen Kardinalzahlen (statt $\aleph_1$) gibt es keine Aronszajnbäume? the tree property (anspruchsvolles Thema mit Kompaktheitssatz und Skopemhüllen, braucht gutes Verständnis des Kompaktheitssatzes aus der Mathematischen Logik und des Satzes von Löwenheim und Skolem)

Jech page 120, Levy IX 2.13

Definition von schwach kompakten Kardinalzahlen, weakly compact cardinal. Jech 9.8

Zusammenhang mit $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Der Satz von Erdős und Tarski, Teil 1:

Jech 9.9, 9.26, Kanamori 7.8 (dort: Äquivalenz von (b), (c) und (d)), Ziegler 12.1–12.3

Der Satz von Erdős und Tarski (1963/64) Teil 2: Zusammenhang mit dem Kompaktheitssatz für $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$. (Vorsicht: Die Kompaktheit von $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ ist die Definition von "weakly compact" in Kanamori)

Jech 17.13, Kanamori 7.8 (dort: Äquivalenz von (a) mit allen anderen)

(3) (*Mögliches Datum 9.11.2010*) Einführung in die Kombinatorik der Clubs und stationären Mengen.

Das Fodor-Lemma, auch Pressing down lemma genannt: Es gibt keine regressive injektive Funktion auf $\aleph_1$ und auch nicht auf stationären Teilmengen.

Jech 8.7, Kunen II 6.14, Levy IV 4.40, Ziegler 8.4

Der Satz von Solovay über disjunkte stationäre Mengen.

Jech 8.10, Levy IV 4.48, Ziegler 8.6

(4) (*Mögliches Datum 16.11.2010*) Ein positives gap-2-result und eine negative Färbungseigenschaft.

Es gibt keine Bäume der Höhe κ^{++} und der Breite $\leq \kappa$ ohne konfinale Äste.

Levy IX 2.32, Kanamori als Kurepas Satz 7.9

Ein („der") Satz von Sierpiński. $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$. Folge: Keine überabzählbare Wohlordnung lässt sich in die reellen Zahlen (mit ihrer üblichen linearen Ordnung) einbetten.

Jech 9.4, 9.5 , Levy IX 3.8

(5) (*Mögliches Datum 23.11.2010*) Der Satz von Erdős und Rado. $\beth_n(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$. Wenn man also genügend große Grundmengen färbt, dann läßt sich also eine Version des Satzes von Ramsey ins Überabzählbare übertragen.

Jech 9.6, Levy IX 3.12–3.15, Ziegler 10.3, 10.4

(6) (*Mögliches Datum 30.11.2010*) Das Δ-System-Lemma für endliche Mengen und ein allgemeines Δ-System-Lemma: Auch ohne lineare Ordnungen gibt es Homogenität, diesmal bei Mengen statt endlich langen Tupeln.

Kunen II 1.6, Jech 9.18, 9.19, Mildenberger 3.5, 3.6

Für unendlich lange Tupel gibt es eine Färbung in zwei Farben, die keine unendliche homogene Menge enthält. William Timothy Gowers, Ramsey Methods in Banach Spaces, Handbook of the Geometry of Banach Spaces vol 2, ed. by William B. Johnson and Joram Lindenstruss, 2003, Elsevier Science, pages 1071 - 1097, Section 3, pages 76/77.

(7) (*Mögliches Datum 6.12.2010*) Das Prinzip Karo. Unter Karo gibt es einen Souslinbaum. Ein Konsistenzproblem, das 1970 gelöst wurde, aber zahlreiche heute noch offene Verwandte hat.

Jech 15.26, Levy IX 2.42– 2.45, 12 Zeilen auf Seite 2/3 in Friedmans Skript vom Sommer 2010 http://www.logic.univie.ac.at/∼sdf

(7a) Bei Interesse auch: Aus Martins Axiom folgt, dass es keinen Souslinbaum gibt

Jech 16.6, Kunen II.2.2.3, II.2.2.4, II.4.2, II.4.3 (ganz kurz, mehr Definitionen als Herleitungen)

und, dass jeder Aronszajnbaum speziell ist.

Jech 16.17, 16.18

(8) (*Mögliches Datum 13.12.2010*) Todorcevic 1987: Es gibt eine Färbung der Paare in $\aleph_1$ in unendlich viele Farben, so dass jede überabzählbare Teilmenge alle Farben enthält, in ungarischer Pfeilnotation: $\aleph_1 \not\to [\aleph_1]^2_{\omega_1}$. Der kurze Beweis von Velleman 1990

Velleman, Dan: Partitioning pairs of countable sets of ordinals. J. Symbolic Logic 55 (1990), no. 3, 1019–1021. 1990. Assaf Rinot Coloring Theorems, An incoherent survey, Seminarskript Tel Aviv 2010.

(9) (*Mögliches Datum 20.12.2010*) Clubguessing. In ZFC gibt es Vorhersagefolgen (guessing sequences) für dicke Teilmengen bei Kardinalzahldifferenz zwei und höher.

Thm 3 in Friedmans Vorlesung vom Sommer 2010,
http://www.logic.univie.ac.at/∼sdf, Hirschorn, James Random trees under CH. Israel J. Math. 157 (2007), 123–153, Theorem 2.4, Jech 23.3

(10–14) Todorcevic walks. Eine Technik zum Färben von Ordinalzahlpaaren, so dass die Färbungen zum Teil maximal inhomogen sind, aber andrerseits unter anderen Homogenitätskriterien Konstruktionen gestatten, die in erstaunlich wenige Teile zerfallen. Eine Rosine ist hier die Countryman-Ordnung. Dieses Thema wird in mehrere Vorträge unterteilt. Die Seitenangaben beziehen sich auf das obengenannte Buch von Todorčević.

(10) (*Mögliches Datum 13.1.2011, Oberwolfach*) Seite 18 bis 22 unten. Einführung der Walks, Kohärenz

(11) (*Mögliches Datum 18.1.2011*) Seite 22 unten bis 24 unten: Eine Countryman-0rdnung, das heißt, eine überabzählbare Ordnung, deren Quadrat in nur abzählbar viele Ketten zerfällt.

Beweis, dass Countryman-Ordnungen und die Aronszajn-Typen (ein Isomorphietyp von linearen Ordnungen, den man durch Plätten von Aronszajnbäumen erhält) folgenden Eigenschaft haben: In sie lässt ich weder eine überabzählbare Teilordung der reellen Zahlen einbetten noch eine überabzählbare Wohlordnung. Selber machen. Oder in Baumgartner, James E. A new class of order types. Ann. Math. Logic 9 (1976), no. 3, 187–222, nachschauen.

(12) (*Mögliches Datum 25.1.2011*) Seite 29 bis 31: Ein homogenes Eberlein-Kompaktum, Teil 1.

(13) (*Mögliches Datum 1.2.2011*) Seite 31 bis 33: Ein homogenes Eberlein-Kompaktum, Teil 2.

(14) (*Mögliches Datum 8.2.2011*) Seite 63 unten bis 66 unten: Eine aus einem Walk konstruierte Hausdorff-Lücke.

Topics of talks

(0) Cardinals and cardinalities. Successors and powersets.

(1) Ramsey's theorem. There is an Aronszajn tree.

(2) The tree property. Equivalence to weak compactness.

(3) Fodor's lemma. Solovay's theorem on disjoint stationary sets

(4) The Erdős Rado Theorem. $\beth_n(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$.

(5) There are no κ-κ^{++}-Aronszajn trees, and Sierpiński's theorem: $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$.

(6) The Δ-system lemma. Coloring infinite tuples.

(7) The diamond. It implies that there is a Souslin tree. Maybe a second talk on: MA implies that there is no Souslin tree and that all Aronszajn trees are special

(8) Todorcevic 1987: $\aleph_1 \not\to [\aleph_1]^2_{\omega_1}$. Velleman's short proof JSL 1990.

(9) Club guessing in ZFC.

(10/11) Todorcevic walks. Several talks. The Countryman order.

(12/13) A homogeneous Eberlein compactum

(14) A Hausdorff gap from a walk