Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Blatt 1, 17.04.2018,
Abgabe am 24.04.2018 *vor* der Vorlesung
im Hörsaal II oder im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Staße

1. Sei $S = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \boxplus, \circ, \mathtt{P}, \lhd\}$; dabei seien $\mathtt{0}, \mathtt{1}$ Konstantenzeichen, $\boxplus, \circ$ zweistellige Funktionszeichen und $\mathtt{P}$ ein einstelliges und $\lhd$ ein zweistelliges Relationszeichen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als S-Struktur $\mathfrak{N}$, indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren:

$$\mathtt{0}^{\mathfrak{N}} = 0,\ \mathtt{1}^{\mathfrak{N}} = 1,\ \boxplus^{\mathfrak{N}} = +,\ \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot,\ \mathtt{P}^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\},\ \lhd^{\mathfrak{N}} = <$$

   Drücken Sie folgende Aussagen als S-Formeln aus:

   a) Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.
   b) Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.
   c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
   d) Es gibt genau eine gerade Primzahl.

   Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

   e) Gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w (z = x \boxplus v \wedge y = z \boxplus w))$?
   f) Gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w ((z = x \boxplus v \wedge y = z \boxplus w)) \vee (z = y \boxplus w \wedge x = z \boxplus w))$?

2. Seien $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ und $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$

   (a) Sei $t(x, y, u, z, v) = x \cdot (y + z)$. Berechnen Sie $t^{\mathfrak{N}}[1, 1, 2, 3, 5]$ und $t^{\mathfrak{Q}}[\frac{2}{5}, 3, 5, \frac{1}{10}, 11]$.
   (b) Sei $\phi(x, y, z) = \exists x\ z = x + y$. Gilt $\mathfrak{N} \models \phi[2, 2, 1]$? Gilt $\mathfrak{Q} \models \phi[2, 2, 1]$?
   (c) Sei $\theta(y) = \exists x \forall z\ x + y = y$. Gilt $\mathfrak{N} \models \theta[4]$? Gilt $\mathfrak{Q} \models \theta[4]$?
   (d) Sei $\psi(z) = \exists x \forall y ((x \cdot z \cdot y = y)$. Gilt $\mathfrak{N} \models \psi[n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Gibt es $n \in \mathbb{N}$, so dass $\mathfrak{N} \models \psi[n]$? Für welche $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\mathfrak{Q} \models \psi[q]$?

3. Ein Junktorensystem $\mathcal{J}$ heißt *vollständig,* wenn sich jede Funktion $G \colon \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ durch eine aussagenlogische Formel $f(p_1, \ldots, p_n)$ darstellen lässt, in der nur Junktoren aus $\mathcal{J}$ vorkommen. „f stellt G dar" heißt:

$$G(\mu(p_1), \ldots, \mu(p_n)) = \mu(f) \text{ für alle Belegungen } \mu \colon \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}.$$

   Ist $\mathcal{J} = \{|\}$ mit dem *Sheffer'schen Strich, engl. Sheffer stroke* $(f|g) := \neg(f \wedge g)$ ein vollständiges Junktorensystem? Begründen Sie die Antwort.

4. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Sei $f \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus. Gilt für jede Formel $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathcal{L}(\tau)$ und jedes $a_0, \ldots a_{n-1} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})]?$$