

Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Blatt 2, 24.04.2018,

Abgabe am 30.04.2018 vor 18Uhr

im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Staße

1. (4 Punkte) Seien P ein zweistelliges Relationssymbol, f, g ein zweistelliges Funktionssymbol und d ein Konstantensymbol. Geben Sie für jeden der Aussagen eine Interpretation an, die ihn erfüllt, und eine, die ihn nicht erfüllt:

(a) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow f(x, y) = x \wedge g(x, y) = y)$.

(b) $\exists x (f(x, d) = d \wedge g(x, d) = x)$.

(c) $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow (P(x, z) \wedge P(z, y)))$.

(d) $\forall x (f(x, d) = x)$.

2. (6 Punkte)

Sei $L = \{c, f\}$ eine Sprache mit einem Konstantensymbol c und einem einstelligem Funktionssymbol f . Sei \mathbf{T} die Menge, die durch die folgenden Aussagen gebildet wird:

- $\forall x (\neg(c \doteq f(x)))$
- $\forall x \forall y (f(x) \doteq f(y) \rightarrow x \doteq y)$
- $\forall x (\neg(x \doteq c) \rightarrow \exists y (x \doteq f(y)))$

- (a) Gibt es eines endliches L -Modell für \mathbf{T} ?
- (b) Finden Sie zwei L -Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ für \mathbf{T} , die nicht isomorph sind.

Für jede L -Formel φ definieren wir das folgende Axiom:

$$I_\varphi := \left(\varphi \left[\frac{c}{x} \right] \wedge \forall y \left(\varphi \left[\frac{y}{x} \right] \rightarrow \varphi \left[\frac{fy}{x} \right] \right) \right) \rightarrow \forall x \varphi.$$

Sei $\mathbf{T}^* := \mathbf{T} \cup \{I_\varphi : \varphi \text{ ist eine } L\text{-Formel}\}$.

- (c) Finden Sie eine unendliche L -Struktur \mathfrak{A} , so dass

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{T} \text{ und } \mathfrak{A} \not\models \mathbf{T}^*$$

- (d) Finden Sie unendliche viele L -Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ für \mathbf{T}^* , die nicht isomorph sind.

3. (2 Punkte)

- (a) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?
- (b) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ elementar äquivalent mit $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?