Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Blatt 3, 1.5.2018,
Abgabe am 8.5.2018 vor 10 Uhr
im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder vor Beginn der Vorlesung

1. Alle Variablen in dieser Aufgabe stehen für aussagenlogische Formeln.

   Seien g_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form
   $$\bigvee_{i=1}^{N} g_i$$
   heißt Formel in *disjunktiver Normalform.*

   Seien c_i Disjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form
   $$\bigwedge_{i=1}^{N} c_i$$
   heißt Formel in *konjunktiver Normalform.*

   Ist jede aussagenlogische Formel zu einer Formel in disjunktiver Normalform und zu einer Formel in konjunktiver Normalform äquivalent?

   (Hinweis: Führen Sie Induktion über die Anzahl der Variablen. Leiten Sie für drei Variable Distributivgesetze her und benutzen Sie die de Morgan'schen Regeln.)

2. Gegeben eine Sprache $\mathcal{L}$ betrachten wir eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit Grundmenge A, $b \notin A$ und eine Struktur $\mathfrak{B}$ mit Grundmenge $B := A \cup \{b\}$. Dann wähle ein Element $a \in A$ aus. Man definiert:

   - Für jede Konstante $c \in \mathcal{L}$, $c^{\mathfrak{A}} := c^{\mathfrak{B}}$
   - Für jedes Relationszeichen R und für jedes $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$,
     $$R^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) \text{ genau dann, wenn } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n),$$
     wobei
     $$a_i := \begin{cases} b_i, & \text{wenn } b_i \in A; \\ a, & \text{wenn } b_i = b. \end{cases}$$
   - Für jedes Funktionszeichen F und für jedes $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$,
     $$F^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n) := F^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n),$$
     wobei die a_i wie oben definiert sind.

Gegeben eine Belegung $\beta' : \{v_0, v_1, \dots\} \to B$ definiert man eine Belegung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$ wie folgt:

$$\beta(x) := \begin{cases} \beta'(x), & \text{wenn } \beta(x) \in A; \\ a, & \text{wenn } \beta(x) = b. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formel φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi[\beta'].$$

3. Gegeben eine Sprache τ mit einem zweistelligen Relationszeichen $E \in \tau$ betrachten wir die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}}, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in \mathcal{L} \setminus \{E\}})$, so dass

$$E^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, a \rangle : a \in \mathfrak{A}\}.$$

(Wir nennen eine τ-Struktur mit diese Eigenschaft *normale Struktur*.)

(a) Gibt es eine Menge von $\mathscr{L}(\tau)$-Aussagen T, so dass $\mathfrak{A} \models T$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ normal ist?

(b) Nun lassen wir die atomaren Formeln des Typs $t_0 = t_1$ im Sprachaufbau weg und betrachten also die erste Stufe $\mathscr{L}^-(\tau)$ ohne Gleichheitssymbol. Gibt es nun eine Menge von $\mathscr{L}^-(\tau)$-Aussagen T, so dass $\mathfrak{A} \models T$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ normal ist?

4. Wir schreiben für die Aussagenlogik $\varphi \models \psi$, wenn für alle Wahrheitsbelegungen μ gilt: Wenn $\mu(\varphi) = W$, so $\mu(\psi) = W$. Für Satzmengen sei $\varphi \models \psi$ entsprechend definiert: Für alle μ, wenn μ alle $\varphi \in \varphi$ wahr macht, so $\mu(\psi) = W$.

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache erster Stufe oder eine Menge aussagenlogischer Formeln. $\Phi \subseteq \mathcal{L}$ heißt unabhängig, wenn für alle paarweise verschiedenen φ_1, $\varphi_2 \in \Phi$ nicht $\varphi_1 \models \varphi_2$. Ξ heißt Axiomatisierung von Φ, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt: $\Xi \models \varphi$ gdw $\Phi \models \varphi$.

(a) Hat jede abzählbare Formelmenge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine unabhängige Axiomatisierung?

(b) Hat jede Formelmenge eine unabhängige Axiomatisierung, die Teilmenge von ihr ist?