Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Blatt 4, 8.5.2018,
Abgabe am 15.5.2018 *vor* 10 Uhr
im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder in der Vorlesung zu Beginn der Vorlesung

1. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt *Spektrum*, wenn es eine Sprache L und eine L-Formel φ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$n \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \varphi \text{ besitzt ein Modell mit} \\ \text{einer } n\text{-elementiger Grundmenge.} \end{array}$$

   (a) Ist jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Spektrum?

   (b) Ist die Menge der geraden Zahlen aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Spektrum?

   (c) Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, die kein Spektrum ist?

   (d) Wer mag, kann sich überlegen ohne Bepunktung, ob die Mengen der

   - Quadratzahlen,
   - Primzahlpotenzen,
   - Zweierpotenzen

   Spektren sind.

2. Sei $\mathscr{L} = \mathscr{L}(p_0, p_1, \dots)$ die Menge der aussagenlogischen Formeln mit abzählbar unendlich vielen Aussagenvariablen p_n, $n \in \mathbb{N}$. Zwei $\mathscr{L}$-Theorien T_1, T_2 heißen *äquivalent,* wenn für alle $\mathscr{L}$-Formeln gilt:

$$T_1 \models \varphi \text{ gdw } T_2 \models \varphi.$$

   (a) Wie viele $\mathscr{L}$-Formeln gibt es?

   (b) Wie viele konsistente $\mathscr{L}$-Theorien gibt es?

   Wenn Sie interessiert sind, können Sie (ohne Punkte-Wertung) über folgende Frage nachdenken:

   (c)* Wie viele paarweise nicht äquivalente $\mathscr{L}$-Theorien gibt es?

3. (a) Gilt $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\psi \vee \varphi)$?

   (b) Gilt $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$?

   (c) Folgt aus $\vdash \exists y\forall x\varphi(x, y)$ die Beweisbarkeitsaussage $\vdash \forall x\exists y\varphi(x, y)$?

   (d) Gilt $\vdash (\exists x\psi \wedge \exists x\varphi) \to \exists x(\psi \wedge \varphi)$?

   Begründen Sie Ihre Antworten. Dies gilt für alle Aufgaben.

Bitte wenden

4. Es sei τ eine Sprache und $\Omega(\tau)$ die Klasse der τ-Strukturen. Eine Teilklasse $\mathbf{K} \subseteq \Omega(\tau)$ heißt *[endlich] axiomatisierbar*, wenn es eine [endliche] Formelmenge T gibt, so dass $\mathbf{K} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models T\}$.

   $\mathbf{K}, \mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ seien endlich axiomatisierbar.

   (a) Gibt es eine $\mathscr{L}(\tau)$-Formel φ, so dass $\mathbf{K} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi\}$?

   (b) Sind auch die Klassen $\Omega(\tau) \setminus \mathbf{K}$, $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ und $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ jeweils endlich axiomatisierbar?