

Mathematische Logik Sommersemester 2018

Blatt 5, 15.5.2018,

Abgabe am 29.5.2018 vor 10 Uhr

im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder in der Vorlesung zu Beginn der Vorlesung

1. (2 Punkte) Sei \mathfrak{A} eine L -Struktur mit Grundmenge A . Eine Teilmenge $X \subseteq A^n$ heißt *definierbar* in \mathfrak{A} , wenn es eine L -Formel φ gibt, so dass für alle $\bar{a} \in A^n$,

$$\bar{a} \in X \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}].$$

E steht für die Exponentiationsfunktion auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(x, y) \mapsto xEy = x^y$ und ist gleichzeitig ein zweistelliges Funktionssymbol. Ist die dreistellige Relation $\{(m, n, m + n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ in der Struktur (\mathbb{N}, \cdot, E) definierbar?

2. (6 Punkte)

- (a) Gegeben sei der angeordnete Körper \mathfrak{R} der reellen Zahlen. Gibt es eine zu \mathfrak{R} elementar äquivalente Struktur, die nicht archimedisch geordnet ist?
- (b) Gegeben seien $L := \{c, f\}$ und \mathbf{T}^* wie im Aufgabe 2 von Blatt 2. Zeigen Sie, dass es unendliche viele paarweise nicht isomorphe Modelle von \mathbf{T}^* gibt.

(Hinweis für beide Teile: Verwenden Sie die Kompaktheitssatz.

Hinweis für (b): Wenn Ihnen der erste Hinweis nicht genügend hilft, können Sie zum Beispiel “Wikipedia Elementary Diagram” in eine Suchmaschine eingeben.)

3. (4 Punkte) Ein Graph $G = (E, K)$ besteht aus einer nicht leeren Eckenmenge E und einer zweistelligen, symmetrischen, irreflexiven Relation K . Ecken, die in der Relation K stehen, heißen mit einer Kante verbunden. Eine N -Färbung von G ordnet jeder Ecke eine der Farben c_1, \dots, c_N zu, so dass verbundene Ecken verschiedene Farben haben. Ist G genau dann N -färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph N -färbbar ist?

(Hinweis: Führen Sie für jede Ecke e und jede Farbe c_n eine Aussagenvariable $p_{e,n}$ ein.)

4. (4 Punkte) Sei L eine Symbolmenge. Eine Klasse von L -Strukturen heißt *elementar*, wenn sie die Klasse aller Modelle einer Theorie ist.

- (a) Ist die Klasse aller unendlichen L -Strukturen elementar?
- (b) Ist die Klasse aller endlichen L -Strukturen elementar?