Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Blatt 6, 29.5.2018,
Abgabe am 5.6.2018 vor 10 Uhr
im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder in der Vorlesung zu Beginn der Vorlesung

1. (8 Punkte) Sei $\mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Wir machen $\mathbb{N}$ zu einer $\{\epsilon\}$-Struktur $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\beta$ durch $i \in \epsilon^{\mathfrak{N}} j \Leftrightarrow i \in \beta(j)$.

   (a) Welche Axiome von ZFC (ohne Fundierung) gelten in $\mathfrak{N}_\beta$?

   (b) Finden Sie jeweils eine Bijektion β, so dass das Fundierungaxiom in $\mathfrak{N}_\beta$ gilt.
   (*Hinweis*: Um eine fundierte Struktur zu erhalten, betrachte man die Bijektion β mit $\beta^{-1}(\{n_1, \dots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$.)

   (c) Geben Sie ein β an, für das $\mathfrak{N}_\beta$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.

   (d) Geben Sie ein β an, für das $\mathfrak{N}_\beta$ nicht fundiert ist aber trotzdem das Fundierungsaxiom erfüllt.
   (*Hinweis*: für Teil (d): Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finden Sie eine geeignete Bijektion $\beta : \mathbb{Z} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{Z})$, so dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \in \beta(n) \Rightarrow m < n$.)

2. (8 Punkte) Eine Menge S heißt T-*endlich*, wenn jede nicht leere Menge $X \subseteq \mathfrak{P}(S)$ ein $\subseteq$-maximales Element hat, d.h. $u \in X$ so dass es gibt kein Element $v \in X$ mit $u \subsetneqq v$. T kommt von Tarski.

   Eine Menge S heißt T-unendlich, wenn S nicht T-endlich ist.

   Eine Menge M heißt endlich, wenn es eine Bijektion von M auf eine natürliche Zahl gibt. Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.

   (a) Ist jedes $\underline{n} \in \omega$ T-endlich?

   (b) Ist ω T-unendlich?

   (c) Ist jede endliche Menge T-endlich?

   (d) Ist jede unendliche Menge T-unendlich?

   Wo verwenden Sie in Ihrer Argumentation das Auswahlaxiom?