Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Blatt 7, 5.6.2018,
Abgabe am 12.6.2018 vor 10 Uhr
im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder in der Vorlesung zu Beginn der Vorlesung

1. (4 Punkte) Sind die Menge der reellen Zahlen und die Potenzmenge von ω gleichmächtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. (6 Punkte) Beweisen Sie den Satz von Schröder-Bernstein: Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion $h : B \to A$.

   (*Hinweis*: Wir können annehmen, dass A eine Teilmenge von B und f die Inklusionsabbildung ist. Sei $C = \{g^n(x) : n \in \omega, x \in B \setminus A\}$. Setze $h(c) = g(c)$ für $c \in C$ und $h(y) = y$ für $y \in B \setminus C$.)

3. (6 Punkte) Sei (A, R) fundiert und mengenähnlich. Wir definieren, für $a, b \in A$:

$$aR^*b :\Longleftrightarrow \exists n \exists a_0, \dots a_{n-1}(aRa_0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-2} a_iRa_{i+1} \wedge a_{n-1}Rb).$$

   (a) Ist R^* transitiv?

   (b) Ist (A, R^*) fundiert?

   (c) Ist (A, R^*) mengenähnlich? (*Hinweis*: $\{b \in A : bR^*a\}$ kann man durch eine Rekursion über ω definieren.)