Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Blatt 8, 12.6.2018,
Abgabe am 19.6.2018 vor 10 Uhr
im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder in der Vorlesung zu Beginn der Vorlesung

1. (8 Punkte) Die Exponentiation in dieser Aufgabe ist die *ordinale* Exponentiation. Zeigen Sie den Satz über die *Cantor'sche Normalform*: Jede Ordinalzahl α lässt sich auf eindeutig Weise schreiben als
$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$$
für natürliche Zahlen $n_1 > 0$ und Ordinalzahlen $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$.

   Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung induktiv über α. Beim Induktionsschritt kann man erst das größte α_1 suchen, so dass $\omega^{\alpha_1} \leq \alpha$. Begründen Sie, dass es so ein α_1 gibt und hier keine unbeschränkte Menge steht. Kann man nun mit einer Division mit möglichem Rest argumentieren?

2. (8 Punkte)
   (a) Seien $n, m \in \omega$:
   - Ist $m \oplus n = m + n$?
   - Ist $m \otimes n = m \cdot n$?
   - Ist $\exp(n, m) = m^n$?

   Begründen Sie Ihren Antworten.

   (b) Geben ein Beispiel $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$, so dass $\alpha + \beta \neq \alpha \oplus \beta$.

   (c) Ist ω^ω abzählbar (ordinale Exponentiation)? Begründen Sie Ihren Antwort.

   (d) Ist $\exp(\omega, \omega)$ abzählbar? Begründen Sie Ihren Antwort.

   Bemerkung: In der Literatur wird α^β für beide Exponentiationsoperationen verwendet, und man muss die Auskunft, um welche Operation es sich jeweils handelt, aus dem Kontext ablesen.