Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Rekursionstheorie

Sommersemester 2019

Blatt 3, 20.05.2019

Abgabe am 27.5.2019 vor der Vorlesung oder in den Kasten auf dem Logikflur, Ernst-Zermelo-Str. 1, 3. Stockwerk

1. (4 Punkte) $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt Differenz von r.e. Mengen, wenn es r.e. B, C gibt, so dass $A = B \smallsetminus C$.
   (a) Ist die Menge der Differenzen von r.e. Mengen gegen endliche Schnitte abgeschlossen?
   (b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\{e : W_e = \{0, \ldots, n-1\}\}$ eine Differenz von r.e. Mengen?

2. (4 Punkte) Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein partielle rekursive Funktion und sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Ist $\varphi(A) = \{\varphi(a) : a \in A\}$ r.e.? Wie steht es mit dem Urbild $\varphi^{-1}(A) = \{b \in \mathbb{N} : \varphi(b) \in A\}$?

3. (4 Punkte) Sei Tot $= \{x : W_x = \mathbb{N}\}$ und $K = \{x : x \in W_x\}$. Ist Tot r.e?

   Hinweis: Könnten Sie aus einer rekursiven Aufzählung von Tot eine rekursive Aufzählung von $\mathbb{N} \smallsetminus K$ herstellen? Ist $\mathbb{N} \smallsetminus K$ r.e.?

4. (4 Punkte) Sei $X = W_e$, $Y = W_f$, $X^s = W_{e,s} = \mathrm{dom}(\varphi_{e,s})$, $Y^s = W_{f,s}$.

   Wir definieren

   $X \searrow Y := \{n : (\exists s)(n \in X^s \smallsetminus Y^s)\}$, und

   $X \downarrow Y := (X \searrow Y) \cap Y$.

   (Entschuldigung für die hässlichen Zeichen.)

   (a) Sind die beiden Mengen r.e.?
   (b) Ist $X \searrow Y = (X \smallsetminus Y) \cup X \downarrow Y$?
   (c) Nun sei $X \downarrow Y$ endlich. Ist dann auch $X \smallsetminus Y$ r.e.?