

Rekursionstheorie

Sommersemester 2019

Blatt 6, 17.06.2019

Abgabe am 24.06.2019

Wir erinnern an die Definition von D_u . Sei $u = \sum_{i=0}^k 2^{n_i} \in \mathbb{N}$. Wir setzen $D_u = \{n_i : i \leq k\}$. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$. Für den Turinggrad von A schreiben wir $\deg(A)$, also $\deg(A) = \{B \subseteq \mathbb{N} : A \equiv_T B\}$. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *einfach* (simple), wenn sie r.e. ist und ihr Komplement keine unendliche r.e. Teilmenge hat, aber unendlich ist.

1. (4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn $A \leq_T B$, so $\bar{A} \leq_T B$.
- (b) Wenn $A \leq B$, so $A \leq_T \bar{B}$.
- (c) $\deg(A) = \deg(\bar{A})$.
- (d) $\mathfrak{o}' = \deg(\mathcal{K})$ enthält auch nicht rekursiv aufzählbare Mengen.

2. (4 Punkte) Seien A, B r.e. Es gebe eine rekursive Relation R , so dass für alle x :

$$x \in A \leftrightarrow \exists u \exists z (D_u \subseteq B \wedge R(x, u, z)).$$

Gilt dann $A \leq_T B$?

3. (4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn A einfach ist, so hat A keine ko-unendliche rekursive Obermenge.
- (b) Wenn A keine ko-unendliche rekursive Obermenge hat, so ist A einfach.
- (c) Die einfachen Mengen sind gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen.
- (d) Wenn A einfach ist und W_x unendlich ist, so ist $A \cap W_x$ unendlich.

4. (4 Punkte) Schwerere Aufgabe. Gibt es eine einfache Menge?