Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Rekursionstheorie

Sommersemester 2019

Blatt 9, 08.07.2019

Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Wir definieren:

- Der "Turing-joint von A und B" ist definiert als $A \oplus B = \{2x \ : \ x \in A\} \cup \{2x+1 \ : \ x \in B\}$ (d.h. wie im Blatt 7 definiert)
- "B is many-to-one reducible to A", in Zeichen $B \leq_m A$, wenn es eine rekursive Funktion gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \in B \Leftrightarrow f(n) \in A$.
- "B is one-to-one reducible to A", in Zeichen $B \leq_1 A$, wenn es eine injektive rekursive Funktion gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \in B \Leftrightarrow f(n) \in A$.

1. (4 Punkte) Seien $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$
   (a) Ist $A \leq_m A \oplus B$ (und $A \leq_m A \oplus B$)? Begründen Sie die Antwort.
   (b) Wenn $A \leq_m C$ und $B \leq_m C$ sind, ist dann $A \oplus B \leq_m C$? Begründen Sie die Antwort.
2. (4 Punkte) Finden Sie Mengen A, B, so dass $B \leq_m A$ aber $B \not\leq_1 A$. Kann B rekursiv sein?
   Hinweis: Man kann eine einfache (simple) Menge A betrachten.
3. (4 Punkte) (Carl Jockusch Jr.) Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$.
   Zeigen Sie, dass
   $$A \times \bar{A} \not\leq_m B \oplus \bar{B}, \tag{1}$$
   wenn A und B r.e. Mengen sind und A nicht rekursiv ist.
   Hinweis: Wir nehmen an, dass es eine rekursive Funktion f gibt, so dass
   $$(\forall x, y)(x \in A \wedge y \in \bar{A} \Leftrightarrow f(x,y) \in B \oplus \bar{B}).$$
   Definieren Sie $C := \{y \ : \ \exists x(f(x,y) \in B \oplus \emptyset\}$ und zeigen Sie, dass $C \subseteq \bar{A}$ und C r.e. ist. Dann zeigt man, dass $\bar{A} \setminus C$ nicht leer ist und nimmt ein $a \in \bar{A} \setminus C$. Für jedes solche a gilt
   $$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow f(x,a) \in \emptyset \oplus \bar{B}).$$
   Frage für Mengentheoretiker(innen) (ohne Bepunktung): Erinnert Sie die Syntax von Gleichung (1) an den Satz von Julius König über Produkte versus Summen von Kardinalzahlen?
4. (4 Punkte) Seien A, B r.e. und sei $A \leq_T B$.
   (a) Ist dann $A \leq_T \bar{B}$?
   (b) Ist dann $\bar{A} \leq_T B$?
   (c) Ist dann $A \times \bar{A} \leq_T B$?
   (d) Haben wir also ein Beispiel dafür, dass im Allgemeinen $\leq_T$ echt schwächer als $\leq_m$ ist?