Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 2

Abgabe am 07.05.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1. Sei X eine unendliche Menge und $\mathscr{O}$ die kofinite Topologie auf X, d.h. $\mathscr{O}$ hat als Basis das Mengensystem $\mathscr{B} := \{U \subseteq X \,:\, X \setminus U \text{ ist endlich}\}$ (Vgl. Blatt 1, Aufgabe 2, i).

1. Sei $A \subseteq X$. Wie sieht der Abschluss $\bar{A}$ von A in $(X, \mathscr{O})$ aus? (Hilfreich könnte die Unterscheidung in A endlich oder unendlich sein.)

2. Können Sie alle dichten Teilmengen von X angeben?

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie:

1. $\mathring{A} = \bigcup\{B \in \mathscr{O} \,:\, B \subseteq A\} \stackrel{!}{=} \{x \in A \,:\, \exists U \in \mathscr{U}(x)\; U \subseteq A\}$,

2. A ist genau dann offen, wenn $A = \mathring{A}$.

3. A ist genau dann offen und abgeschlossen, wenn ∂A leer ist.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren eine Abbildung $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

1. Zeigen Sie, dass d' eine Metrik auf X ist.

2. Induzieren d und d' die gleiche Topologie, d.h. gilt $\mathscr{O}(d) = \mathscr{O}(d')$?

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jedes $y \in X$ definieren wir die Abbildung $f_y \colon X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = d(x, y)$. Ist die durch d induzierte Topologie $\mathscr{O}(d)$ die gröbste (oder feinste) Topologie, sodass für jedes $y \in X$ die Abbildung f_y stetig ist (bzgl. $\mathscr{O}(d)$ und der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$)?

Bonus-Aufgabe. Eine etwas schwerere Aufgabe. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie $\mathscr{O}_S$, die durch die Intervalle $[a, b)$, $a < b \in \mathbb{R}$, erzeugt wird.

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *diskret bezüglich* $\mathscr{O}_S$, wenn es für jedes $d \in D$ eine $\mathscr{O}_S$-offene Umgebung gibt, die keinen Punkt aus $D \setminus \{d\}$ enthält. (Man kann auch sagen: Die Spurtopologie von $\mathscr{O}_S$ auf D ist die diskrete Topologie.)

1. Welche Ordnungstypen (in der Ordnung von $\mathbb{R}$) sind unter den $\mathscr{O}_S$-diskreten nach unten beschränkten Mengen zu finden?

2. Gibt es eine überabzählbare $\mathscr{O}_S$-diskrete Teilmenge?