Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 4

Abgabe am 21.05.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ bezeichne $[x] \subseteq X$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen (i,iii,v,vii) und beantworten Sie die Fragen mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel (ii,iv,vi).

i) Wenn $X/_\sim$ ein T_1-Raum ist (bzgl. der Quotiententopologie), so ist jede Äquivalenzklasse $[x] \subseteq X$ abgeschlossen (bzgl. $\mathscr{O}$).

ii) Gilt die Rückrichtung aus i)?

iii) Wenn $(X, \mathscr{O})$ Hausdorff ist, so ist die Diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ abgeschlossen (bzgl. der Produkttopologie).

iv) Gilt die Rückrichtung aus iii)?

v) Wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T_4-Raum ist, so gibt es für jede abgeschlossene Menge A und jede offene Menge U mit $A \subseteq U$ eine offene Menge V, so dass

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

vi) Gilt die Rückrichtung aus v)?

vii) Wenn $(X, \mathscr{O})$ ein normaler Raum ist, gibt es zu jedem Paar disjunkter abgeschlossener Mengen A, B Umgebungen von A und B, so dass deren Abschlüsse disjunkt sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Ist jeder zusammenhängende, normale Raum $(X, \mathscr{O})$ überabzählbar groß? Unter der Größe eines Raumes versteht man die Mächtigkeit der Trägermenge X.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

1. Gibt es einen total unzusammenhängenden Raum $(X, \mathscr{O})$, so dass $\mathscr{O}$ nicht die diskrete Topologie ist?

2. Konstruieren Sie einen topologischen Raum $(X, \mathscr{O})$, so dass $\mathscr{O}$ nicht der Summentopologie der disjunkten Vereinigung der Zusammenhangskomponenten entspricht.

Bonus-Aufgabe. Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie. Sei für $n \in \mathbb{N}$ der Raum $\mathbb{R}_n$ gleich wie $\mathbb{R}$. Ist $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ zusammenhängend bzgl. der Boxtopologie?