Blatt 5

Abgabe am 28.05.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Entscheiden Sie welche der folgenden Implikationen wahr ist, indem Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel angeben.

a) Wenn $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X ist, dann ist

$$f[\mathcal{U}] = \{A \subseteq Y \ : \ f^{-1}[A] \in \mathcal{U}\} \tag{1}$$

ein Ultrafilter auf Y.

Hinweis Sie können benutzen: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter. Dann ist $\mathcal{H} := \{A \subseteq Y \ : \ f^{-1}[A] \in \mathcal{F}\}$ der von $\mathcal{B} := \{f[B] \ : \ B \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter, $f(\mathcal{F})$ oder $f[\mathcal{F}]$, genannt. Die Definition aus (1) und die aus der Vorlesung stimmen also überein. Beweis: Sei $A \in \mathcal{H}$, also $f^{-1}[A] \in \mathcal{F}$. Dann ist $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$ und $f[f^{-1}[A]] \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ erzeugt also $\mathcal{H}$. Umgekehrt ist für $B \in \mathcal{F}$ die Menge $f^{-1}[f[B]] \supseteq B$, also $f^{-1}[f[B]] \in \mathcal{F}$ und daher $f[B] \in \mathcal{H}$.

b) Sei $x \in X$ ein Punkt. Wenn f stetig in x ist, dann gilt für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X: Wenn $\mathcal{F} \to x$, so $f[\mathcal{F}] \to f(x)$.

c) Sei $x \in X$ ein Punkt. Wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X aus der Konvergenz $\mathcal{F} \to x$ die Konvergenz $f[\mathcal{F}] \to f(x)$ folgt, dann ist f stetig in x.

Sei $\langle x_n \ : \ n \in \omega\rangle$ eine Folge in X und $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \ : \ (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(x_n \in A)\}$.

d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

e) Wenn $x \in X$ Häufungspunkt der Folge $\langle x_n \ : \ n \in \omega\rangle$ ist, dann ist x Berührungspunkt des Filters $\mathcal{F}$.

f) Wenn x Berührungspunkt des Filters $\mathcal{F}$ ist, dann ist x Häufungspunkt der Folge $\langle x_n \ : \ n \in \omega\rangle$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes $(X, \mathscr{O})$ und einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf X an, so dass $R = \{(x, y) \in X \times X \ : \ x \sim y\}$ im Raum $X \times X$ nicht abgeschlossen, jedoch für jedes $x \in X$ die Klasse $x/_\sim$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte + 2 **Bonus-Punkte**)**.** Sei X ein T_1-Raum, $x \in X$. Auf der Menge

$$F_x := \{f : U \to \mathbb{R} \ : \ x \in U \subseteq X \text{ offen}, f \text{ stetig}\}$$

definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_x$ durch:

$$f_1 \sim_x f_2 :\Leftrightarrow f_1 \text{ und } f_2 \text{ stimmen auf einer Umgebung um } x \text{ überein.}$$

Wir bezeichnen mit $G_x := F_x/_{\sim_x}$ die Menge der Äquivalenzklassen und mit $\gamma_x : F_x \to G_x$ die Projektion, d.h., $\gamma_x(f) = \{h \in F_x \ : \ h \sim_x f\}$. Das Bild $\gamma_x(f)$ wird auch *Keim von f in x* genannt. Die Vereinigung $G = \bigcup_{x \in X} G_x$ wird *Garbe der Keime stetiger Funktionen* genannt.

a) Zeigen Sie, dass für $x \neq y \in X$ die Gleichung $G_x \cap G_y = \emptyset$ gilt.

Bitte wenden.

Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Wir können also $\pi : G \to X$ durch

$$\pi(g) = x \ :\Leftrightarrow \ g \in G_x$$

definieren. Sei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen $B_f := \{\gamma_x(f) \ : \ x \in U\} \subseteq G$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := \{B_f \ : \ U \subseteq X \text{ offen}, \ f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ eine Basis einer Topologie $\mathscr{O}$ auf G ist.

c) Ist π bzgl. dieser Topologie $\mathscr{O}$ dann ein lokaler Homöomorphismus? D.h., gibt es für jedes $g \in G$ Umgebungen V von g in G und U von $\pi(g)$ in X, so dass $\pi \upharpoonright V \to U$ ein Homöomorphismus ist?

d) Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie. Ist $(G, \mathscr{O})$ hausdorffsch?
Hinweis: Betrachten Sie den Fall $X = \mathbb{R}$ und die Keime von f und h in $x_0 = 0$ für $f \equiv 0$ und $h(x) = 0$, falls $x \leq 0$, $h(x) = x$, sonst.