Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 10

Abgabe am 09.07.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien X, Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei X ein topologischer Raum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
2. Für jedes $x \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ trivial, d.h. sie ist die einelementige Gruppe.
3. Je zwei Wege zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ sind homotop.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien X, Y topologische Räume, Y zusammenziehbar und $f, g : X \to Y$ Abbildungen. Sind f und g homotop?

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 **Bonus**)**.** Seien G eine topologische Gruppe und X kompakt und hausdorffsch. Wir nehmen an, dass *G stetig auf X operiert*, d.h., dass

$$\begin{aligned} \text{die Operation}\colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

bzgl. der Produkttopologie auf dem Urbildraum und der Topologie auf X auf dem Bildraum stetig ist. Wir statten

$$H(X) := \{f : X \to X \ : \ f \text{ ist ein Homöomorphismus}\}$$

mit der kompakt-offenen Topologie aus (vgl. Blatt 7).

Zeigen Sie:

1. Für jedes $g \in G$ liegt die Abbildung $f_g : X \to X$, definiert durch $f_g(x) = gx$, in $H(X)$.
2. Die Abbildung $F : G \to H(X)$, definiert durch $F(g) = f_g$, ist stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie.
3. Gibt es eine topologische Gruppe G, so dass F bijektiv oder sogar ein Homöomorphismus ist?