Abteilung für Mathematische Logik
Heike Mildenberger
Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2020
Übungsblatt 1, 12.5.2020

Abgabe spätestens am 19.5.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg.de [1]

1. Sei $S = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \boxplus, \circ, \mathtt{P}, \lhd\}$; dabei seien $\mathtt{0}, \mathtt{1}$ Konstantenzeichen, $\boxplus, \circ$ zweistellige Funktionszeichen und $\mathtt{P}$ ein einstelliges und $\lhd$ ein zweistelliges Relationszeichen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als S-Struktur $\mathfrak{N}$, indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren:

$$\mathtt{0}^{\mathfrak{N}} = 0,\ \mathtt{1}^{\mathfrak{N}} = 1,\ \boxplus^{\mathfrak{N}} = +,\ \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot,\ \mathtt{P}^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid\ p \text{ ist Primzahl}\},\ \lhd^{\mathfrak{N}} = <$$

Drücken Sie folgende Aussagen als S-Formeln aus:

a) Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.
b) Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.
c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
d) Es gibt genau eine gerade Primzahl.

i) Gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w (z = x \boxplus v \wedge y = z \boxplus w))$?
ii) Gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w ((z = x \boxplus v \wedge y = z \boxplus w)) \vee (z = y \boxplus w \wedge x = z \boxplus w))$?

2. Wir definieren die Menge der K-Terme über $\{[,]\}$ durch folgende Regeln:

(i) Das Wort [ ] ist ein K-Term.
(ii) Falls v, w K-Terme sind, so ist $[vw]$ ein K-Term.

(a) Ist das Wort [ ][ ] ein K-Term? Begründen Sie Ihre Antwort.
(b) Wir definieren F: Menge der K-Terme $\to \mathbb{N}$ durch folgende Regeln:

$$F([\ ]) := 1$$
$$F([vw]) := 1 + \max\{F(v), F(w)\}.$$

Ist die Funktion F wohldefiniert?

Bitte wenden.

[1] Leider war diese Adresse in der Begrüßungsmail vom 9.5.2020 falsch geschrieben.

3. Seien $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine nicht leere Teilmenge von A. Die Menge B enthalte die Interpretationen $c^{\mathfrak{A}}$ aller Konstanten und sei unter allen Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus L auf B einschränkt, erhält man eine L-Struktur $\mathfrak{B}$. Die L-Struktur $\mathfrak{B}$ heißt eine *Unterstruktur von* $\mathfrak{A}$.

(a) Ist der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$, falls er nicht leer ist, wieder eine Unterstruktur?

Aus einer positiven Antwort würde folgen, dass jede nicht leere Teilmenge S von A in einer kleinsten Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ (als Teilmenge) enthalten ist, der *von S erzeugten* Unterstruktur.

(b) Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

4. Sei die *lexikographische Ordnung* auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$(n, m) <_{\text{lex}} (n', m'), \text{ wenn } n < n' \text{ oder } (n = n' \text{ und } m < m').$$

(a) Ist $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{lex}})$ eine lineare Ordnung?

(b) Lesen Sie die Definition der Isomorphierelation $\cong$ im Skript. Ist $(\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{lex}})$?

(c) Gibt es eine Ordnung $\lhd$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so dass $(\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \lhd)$ isomorphe L-Strukturen sind? Falls Sie bejahen, geben Sie bitte eine Ordnung an.