

Mathematische Logik
Sommersemester 2020
Übungsblatt 2, 19.5.2020

Abgabe spätestens am 26.5.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg

1. (a) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?
(b) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?
(c) Ist $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +)$?
(d) Sind (\mathbb{R}, \leq) und (\mathbb{Q}, \leq) elementar äquivalent?

Begründen Sie die Antworten.

2. Ein Graph (V, E) ist eine nichtleere Menge V von *Punkten* zusammen mit einer Menge E , welche aus 2-elementigen Teilmengen von V (oder *Kanten*) besteht. Ein Teilgraph von (V, E) ist ein Graph (V', E') derart, dass $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Jeder Graph kann als Struktur in der Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen R betrachtet werden.

- Zeigen Sie, dass jede Unterstruktur (in der Graphensprache) eines Graphen ein Teilgraph ist.
- Ist \mathfrak{A} ein Teilgraph von \mathfrak{B} ? Ist \mathfrak{A} eine Substruktur von \mathfrak{B} ?



3. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer Struktur in sich selbst.

- (a) Wir betrachten $L = \{P\}$ mit einem einstelligen Relationszeichen P . Sei $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0\})$, also $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$. Wieviele Automorphismen hat \mathfrak{A} ? Wie viele zu \mathfrak{A} isomorphe Strukturen gibt es auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?
- (b) Sei immer noch $L = \{P\}$ mit einem einstelligen Prädikatenzeichen P . Sei $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2\})$. Wie viele Automorphismen hat \mathfrak{A} ? Wie viele zu \mathfrak{A} isomorphe Strukturen gibt es auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?
- (c) Sei L nun beliebig, und sei A endlich. Sei \mathfrak{A} eine L -Struktur. Wie hängt die Anzahl der Automorphismen von \mathfrak{A} mit der Anzahl der zu \mathfrak{A} isomorphen Strukturen auf A zusammen? Können Sie eine Formel erraten und danach ihre Richtigkeit beweisen?

Bitte wenden.

4. Sei $L = \{c, f\}$ eine Sprache mit einem Konstantensymbol c und einem einstelligen Funktionssymbol f . Sei T die Menge, die durch die folgenden Aussagen gebildet wird:

- $\forall x \neg c = f(x)$.
- $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$.
- $\forall x (\neg x = c \rightarrow \exists y x = f(y))$.

(a) Gibt es ein endliches L -Modell für T ?

(b) Finden Sie L -Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von T , so dass

$$(\mathbb{Z}, \{(z, z+1) : z \in \mathbb{Z}\}) \prec \mathfrak{A} \text{ und}$$

$$(\mathbb{Z}, \{(z, z+1) : z \in \mathbb{Z}\}) \not\prec \mathfrak{B}.$$

Hier ist die zweite Komponente der Struktur der Graph der jeweiligen Interpretation von f .

(c) Finden Sie zwei L -Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ für T , die nicht isomorph sind.