Abteilung für Mathematische Logik
Heike Mildenberger
Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2020
Übungsblatt 4, 2.6.2020

Abgabe spätestens am 9.6.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg.de

1. (4 Punkte)
Man definiert das geordnete Paar von zwei Mengen x und y als $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Seien a, b zwei Mengen. Beweisen Sie in ZF $\setminus$\{Potenzmengenaxiom\}, dass das kartesische Produkt $a \times b := \{\langle x, y\rangle : x \in a \wedge y \in b\}$ eine Menge ist.

2. (4 Punkte)
Sei $L = \{0, 1, +, \cdot, <\} \cup \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$ mit Konstantssymbolen c_r. Seien $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <, (r)_{r\in\mathbb{R}})$ und $c \notin L$ fest gewählt. Wir interpretieren also für $r \in \mathbb{R}$ das Konstantenzeichen c_r durch $c_r^{\mathscr{R}} = r$.

Bemerkung:
Die so gewonnene Theorie $\mathrm{Th}(\mathscr{R})$ heißt das elementare Diagramm der Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$.

Ist $\mathrm{Th}(\mathscr{R}) \cup \{0 < c < c_r : r > 0\}$ erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(*Hinweis*: Denken Sie an den Kompaktheitssatz.)

3. (8 Punkte)
Es sei τ eine Symbolmenge, und wir bezeichnen mit $\mathscr{L}(\tau)$ die Menge der erststufigen τ-Formeln. Wir lassen die atomaren Formeln des Typs $t_0 = t_1$ im Sprachaufbau weg und betrachten also die erste Stufe $\mathscr{L}^-(\tau)$ ohne Gleichheitssymbol.

Wir betrachten eine $\mathscr{L}^-(\tau)$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Grundmenge A. Es sei $b \notin A$. Wir definieren nun eine $\mathscr{L}^-(\tau)$-Struktur $\mathfrak{B}$ mit Grundmenge $B := A \cup \{b\}$ wie folgt.

Sei $a \in A$ fest und beliebig gewählt. Wir definieren zuerst eine Funktion $\pi\colon B \to A$,

$$\pi(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in A; \\ a, & \text{wenn } x = b. \end{cases}$$

Dann ist $\pi \circ \pi = \pi$, π ist also eine Projektion. Dann definiert man:

- Für jede Konstante $c \in \tau$, $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}}$.
- Für jedes Relationszeichen $R \in \tau$, für jedes $b_0, \dots, b_{n-1} \in B^n$:

$$R^{\mathfrak{B}}(b_0, \dots, b_{n-1}) \text{ genau dann, wenn } R^{\mathfrak{A}}(\pi(b_0), \dots, \pi(b_{n-1})).$$

- Für jedes Funktionszeichen $F \in \tau$, für jedes $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in B^n$:

$$F^{\mathfrak{B}}(b_0, \dots, b_{n-1}) := F^{\mathfrak{A}}(\pi(b_0), \dots, \pi(b_{n-1})).$$

Gegeben eine Belegung $\beta' : \{v_0, v_1, \dots\} \to B$ definiert man eine Belegung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$ wie folgt:

$$\beta(v_0) := \pi(\beta'(v_0)).$$

(a) Zeigen Sie, dass für jede $\mathscr{L}^-(\tau)$-Formel φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi[\beta'].$$

(b) Ist (a) auch wahr, wenn wir $\mathscr{L}(\tau)$-Formeln anstatt $\mathscr{L}^-(\tau)$-Formeln betrachten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Gegeben sei eine Sprache τ mit mindestens einem zweistelligen Relationszeichen $E \in \tau$. Jede $\mathscr{L}(\tau)$-Struktur sieht also wie folgt aus

$$\mathfrak{A} = \{A, E^{\mathfrak{A}}, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in \mathscr{L}(\tau) \setminus E}\}.$$

Gibt es eine Menge von $\mathscr{L}^-(\tau)$-Sätzen T, so dass für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models T \text{ genau dann, wenn } E^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, a\rangle : a \in \mathfrak{A}\}?$$

Denken Sie nach über die Gleichheitsaxiome. Was bleibt von diesen in $\mathscr{L}^-(\tau)$ übrig?