Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 1

(26.4.2022)

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Es seien V und W ein endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Gibt es dann eine injektive lineare Abbildung $g\colon W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$? Beachten Sie, dass g linear sein soll. Einfach ein Urbild auszuwählen genügt nicht.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Geben Sie die Eigenwerte von A und bestimmen Sie einen Eigenvektor zu jedem Eigenwert. Sind die Eigenvektoren eindeutig?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und $P, Q \in K[X]$ zwei Polynome mit $Q \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass zwei weitere Polynome $P_1, P_2 \in K[X]$ existieren mit $\deg(P_2) < \deg(Q)$ und

$$P = Q \cdot P_1 + P_2.$$

b) Sind die Polynome P_1 und P_2 aus Teil a) eindeutig?

c) Ist die Antwort aus Teil b) dieselbe, wenn man auf die Bedingung $\deg(P_2) < \deg(Q)$ verzichtet?

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 3.5.2022, 12 Uhr.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A und geben Sie die Basiswechselmatrix $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ an, sodass $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^{-1} = A$ gilt.

Die Fibonacci-Folge ist definiert durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{und} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für alle } n \geq 2.$$

b) Zeigen Sie, dass $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

c) Zeigen Sie die folgende Formel mit Hilfe von Teil a) und b):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$