BLATT 2

(3.5.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon V \to V$ Endomorphismus eines Vektorraums V. Sei $v_0 \in V$, und

$$v_i := f^i(v_0).$$

Es gebe ein $k \geq 0$, für das gilt $v_k = 0$[1], und wir wählen das kleinste solche k. Sind dann die Vektoren $v_0, \dots, v_{k-1}$ linear unabhängig? Zur Schreibweise: Falls $v_0 = 0$ ist, ist $k = 0$ und daher $v_0, \dots, v_{k-1}$ die leere Folge von Vektoren.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.**

(1) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, und f ein linearer Endomorphismus von V. Man zeige, dass der konstante Term des charakteristischen Polynoms χ_f gerade die Determinante $\det(f)$ ist.

(2) Nun sei f Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums mit negativer Determinante. Hat f dann einen negativen reellen Eigenwert? Hinweis: Zwischenwertsatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende Matrix, einen sogenannten Jordan-Block der Größe 5:

$$A = J_\lambda^5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{5,5}(\mathbb{C}).$$

Geben Sie die Eigenwerte von A und bestimmen Sie einen Eigenvektor zu jedem Eigenwert. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $f = f_A$ (f_A ist der Endomorphismus, der in den Koordinaten bezüglich der Standardbasis durch Multiplikation mit A beschrieben wird) und den kleinsten Index ν, so dass $(f - \lambda\mathrm{id})^\nu = 0 \in \mathrm{End}(V)$.

Wir möchten das Kästchenlemma verbessern, indem wir in der rechten oberen Ecke die Nullmatrix wünschen. Diesen Versuch formulieren wir als Aufgabe.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum und es sei U ein k-dimensionaler Unterraum. Es sei $\vec{D} = (d_1, \dots, d_n)$ eine angeordnete Basis von V, so dass $(d_1, \dots, d_k)$ den Unterraum U aufspannt. Es sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $f[U] \subseteq U$. Wann gibt es eine Matrix $M \in M_{k,k}(k)$ und eine Matrix $N \in M_{n-k,n-k}(k)$, so dass

$$\mathrm{Mat}_{\vec{D}}^{\vec{D}}(f) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}?$$

Nennen Sie möglichst ein Genau-dann-Kriterium.

[1] Zum Beispiel bei nilpotenten Endomorphismen ist für jedes v_0 diese Voraussetzung erfüllt.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 10.5.2022, 12 Uhr.