# BLATT 3

(10.5.2022)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{C}).$$

Geben Sie die Eigenwerte von $A$ und bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Sei außerdem $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Sei $\chi_f = X^n$. Ist $f$ nilpotent?

(b) Sei $f$ nun nilpotent. Ist dann auch $\chi_f = X^n$?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Es sei $f \colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines $n$-dimensionalen Vektorraums $V$, $n \geq 1$ und es sei $n$ der Nilpotenzgrad. Nach einer einfachen Version des Satzes 1.26 gibt es eine $f$-zyklische Basis von $V$. Es seien also $v \in V$ ein Hauptvektor und

$$(f^{n-1}(v), \ldots, v)$$

eine $f$-zyklische Basis.

(a) Nun sei $\dim(V) = 1$. Ist $v$ durch die Forderung, dass es ein Hauptvektor sein soll, eindeutig bestimmt?

(b) Nun sei $\dim(V) = 2$. Charakterisieren Sie die Menge der Vektoren, die als Hauptvektoren fungieren können. Ist diese Menge ein Unterraum? Ist diese Menge eine Nebenklasse, d.h. von der Form $\{x + u \mid u \in U\}$ für einen Unterraum $U$? Finden Sie einen Unterraum oder eine Nebenklasse, der/die eine Teilmenge dieser Menge ist?

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.**

(a) Es sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper einer von 2 verschiedenen Charakteristik und $f \colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Man zeige: $f$ ist diagonalisierbar und hat keine Eigenwerte außer $\pm 1$.

(b)* Für $\mathrm{char}(K) = 2$, finde man eine lineare Abbildung $g \colon K^2 \to K^2$ mit $g^2 = \mathrm{id}_{K^2}$, die nicht diagonalisierbar ist.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 17.5.2022, 12 Uhr.