Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 4

(17.5.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

a) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente obere Dreiecksmatrix N mit $DN \neq ND$. Welche Dimension braucht man hierzu mindestens?

b) Finden Sie zwei nilpotente Matrizen, deren Summe nicht nilpotent ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien M, N diagonalisierbare Matrizen mit $MN = NM$. Zeigen Sie, dass es eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren gibt.

Hinweis: Der Beweis von Lemma 1.32 kann helfen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende Matrix: Es sei $A \in M_{n,n}(K)$ eine reguläre (d.h. invertierbare) Matrix. Zeigen Sie, dass es ein Polynom P gibt, so dass $P(A) = A^{-1}$.

Hinweis: Blatt 2 Aufgabe 2(1) und der Satz von Cayley–Hamilton könnten helfen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Eine *vollständige Fahne* von V ist eine Folge von Untervektorräumen

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n,$$

so dass $\dim(V_i) = i$ für alle V_i gilt. Sei zusätzlich $f : V \to V$ ein Endomorphismus, dann heißt eine vollständige Fahne f-invariant, falls alle V_i f-invariant sind, also $f[V_i] \subseteq V_i$.

a) Zeigen Sie, dass *genau dann* eine vollständige f-invariante Fahne von V existiert, wenn eine Basis $\vec{B}$ von V existiert, so dass $\mathrm{Mat}^{\vec{B}}_{\vec{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Es existiere nun eine vollständige f-invariante Fahne von V. Folgern Sie daraus den Satz von Cayley-Hamilton, also dass $\chi_f(f) = 0$ gilt.

   Hinweis: Betrachten Sie die charakteristischen Polynome $\chi_{f\restriction V_i}$. Ist $\chi_{f\restriction V_i}(f \restriction V_i) = 0$?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 24.5.2022, 12 Uhr.