BLATT 5

(24.5.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

a) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Beweisen Sie die *Polarisierungsidentität*

$$2\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

b) Gilt die Polarisierungsidentität auch für unitäre Vektorräume?

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Vorschrift $\langle v, w\rangle_A = v^T A w$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Ist die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich diesem Skalarprodukt orthogonal bzw. normiert?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass der durch U definierte Endomorphismus von $\mathbb{C}^2$ bezüglich dem Standardskalarprodukt *unitär* ist, d.h. $\bar{U}^T = U^{-1}$.

b) Finden Sie eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren von U.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 31.5.2022, 12 Uhr.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** a) Zeigen Sie, dass die Cosinusfunktion aus Definition 2.17 wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie den *Cosinus-Satz*

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = c^2$$

für jedes Dreieck mit positiven Seitenlängen a, b, c und zu c gegenüberliegendem Winkel γ.

c) Wir betrachten ein Dreieck in $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Längen der Seite des Dreiecks bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ aus Aufgabe 2.