BLATT 6
(31.5.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir erinnern an **Definition 4.28** aus LA I:
Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Das Paar V, W heißt *duales Paar*, wenn es eine Bilinearform $s\colon V \times W \to \mathbb{K}$ gibt, so dass $\dim(V)$ endlich ist und $\dim(V) = \dim(W) = \mathrm{Rang}(s)$. Wir erinnern außerdem daran, dass $\mathrm{Rang}(s) = \mathrm{Rang}(\mathrm{Mat}_{\vec{B},\vec{C}}(s))$ bezüglich irgendwelcher angeordneter Basen $\vec{B}$ und $\vec{C}$ von V bzw. W.

a) Es sei (V, s) euklidisch/unitär. Ist (V, V) ein duales Paar mit bezeugender Bilinearform s?

b) Nun sei (V, V) ein duales Paar mit bezeugender Bilinearform s. Ist s ein Skalarprodukt?

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$, sodass alle Eigenwerte von f reell sind und V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f besitzt. Ist f dann selbstadjungiert, also gilt $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Es sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ der Raum der rellen 2×2-Matrizen. Mit $\mathrm{Spur}(A)$ bezeichnen wir die Summe der Diagonalelemente einer Matrix $A \in V$ und wir definieren $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$b(A, B) = 2\,\mathrm{Spur}(AB) - \mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B).$$

a) Geben Sie eine Basis von V an.

b) Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform auf V definiert. Ist b ein Skalarprodukt?

c) Geben Sie die darstellende Matrix von b bezüglich Ihrer Basis aus Teil a) an.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag **14.**06.2022, 12 Uhr.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Es seien V und W zwei euklidische/unitäre Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$. Es sei außerdem $f : V \to W$ ein Homomorphismus.

a) Es sei f unitär. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

b) Es sei f weiterhin unitär und seien $\vec{B}$ und $\vec{C}$ Orthonormalbasen von V bzw. $f[V]$. Gilt dann

$$\mathrm{Mat}^{\vec{B}}_{\vec{C}}(f^{-1}) = \overline{\mathrm{Mat}^{\vec{C}}_{\vec{B}}(f)}^{T} \; ? \tag{1}$$

c) Sei nun f bijektiv und seien $\vec{B}$ und $\vec{C}$ Orthonormalbasen von V bzw. W, sodass für die Darstellungsmatrix von f^{-1} bezüglich dieser Basen Gleichung (1) aus Teil b) wahr ist. Ist f dann unitär?

(d) Freiwillig: Beantworten Sie die Fragen aus Teil b) und den Teil c) für beliebige Basen.