BLATT 7

(14.6.2022)

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Definiert die Vorschrift $\langle v, w\rangle_A = v^T A w$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Das Kreuzprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \quad \text{für } u, v \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$

b) Es seien nun $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $u \times v \neq 0$ ist. Bilden u und v zusammen mit ihrem Kreuzprodukt $u \times v$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Es seien V und W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $B : V \times W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Wir definieren für $v \in V$ die Abbildung $B(v, \cdot) \in W^*$ durch $w \mapsto B(v, w)$ und analog $B(\cdot, w) \in V^*$ für $w \in W$. Dadurch erhalten wir zwei Funktionen $f\colon V \to W^*$ und $g\colon W \to V^*$ mit

$$\text{für alle } v \in V,\ f(v) = B(v, \cdot), \qquad \text{für alle } w \in W,\ g(w) = B(\cdot, w).$$

a) Zeigen Sie, dass f und g lineare Abbildungen sind.

b) Für die Bilinearform B gelte nun

$$\forall v \in V (\forall w \in W\ B(v, w) = 0 \to v = 0). \tag{1}$$

Ist f dann injektiv?

c) Sei nun f injektiv. Gilt dann auch (1)?

d) Ist g unter Bedingung (1) injektiv? Ist g in diesem Fall surjektiv? Können Sie eine Bedingung angeben, so dass die Antwort auf beide Fragen "Ja" lautet?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag **28**.06.2022, 12 Uhr. Das Blatt 7 ist für zwei Wochen gedacht.