

BLATT 7

(28.6.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte). Wir betrachten die K -Vektorräume $U = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\} \subseteq K^n$ und $V = \{(b, \dots, b) \mid b \in K\} \subseteq K^m$. Bestimmen Sie für $n \geq 2$ und $m \geq 1$ eine Basis von $U \otimes V$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Ist das Tensorprodukt linksdistributiv bezüglich der direkten Summe, d.h. gilt

$$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$$

für beliebige U, V und W Vektorräume über einem Körper K ?

Aufgabe 3 (4 Punkte). **Zur Erinnerung:** Die *Spur* einer quadratischen Matrix A ist die Summe ihrer Diagonalelemente und wird mit $\text{Spur}(A)$ bezeichnet. Für einen endlich dimensionalen Vektorraum V und $f \in \text{End}(V)$ definieren wir $\text{Spur}(f) = \text{Spur}(A)$ für eine darstellende Matrix A von f . (Dies ist wohldefiniert nach Aufgabe 3b) auf Blatt 10 aus der Linearen Algebra 1.)

Seien nun V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume, $f \in \text{End}(V)$ und $g \in \text{End}(W)$. Berechnen Sie $\text{Spur}(f \otimes g)$ in Abhängigkeit von $\text{Spur}(f)$ und $\text{Spur}(g)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte + 4 Bonuspunkte für Teil b)). Es seien V ein n -dimensionaler Vektorraum und W ein m -dimensionaler Vektorraum über einem Körper K .

- a) Seien $A_0 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$ eine vollständige Fahne von V und $B_0 \subsetneq \dots \subsetneq B_m$ eine vollständige Fahne von W . Existiert dann eine vollständige Fahne von $V \otimes W$, welche aus Unterräumen der Form $A_i \otimes B_j$ besteht? Das heißt jedes Glied der Fahne

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_{n \cdot m} = V \otimes W$$

soll eine Gleichung $Z_k = A_i \otimes B_j$ für geeignetes $i = i(k)$ und $j = j(k)$ erfüllen. Zur Herstellung von Z_k sind also keine endlichen Summen aus verschiedenen Produkten gestattet.

- b) Sei umgekehrt $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_{n \cdot m}$ eine vollständige Fahne von $V \otimes W$. Existieren dann Indizes $i_0 < \dots < i_n \leq n \cdot m$, sodass die Mengen

$$A_j = \{v \in V \mid \exists w \in W : v \otimes w \in U_{i_j}\}$$

eine vollständige Fahne von V bilden?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 05.07.2022, 12 Uhr.