BLATT 9

(05.7.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es seien $(e_1^4, \dots, e_4^4)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und $(e_1^3, \dots, e_3^3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben $T = (t_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ für $T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{i,j} \cdot e_i^m \otimes e_j^n$. Schreiben Sie den Tensor

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 31 & 8 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \bigotimes \mathbb{R}^3$$

als Summe aus möglichst wenigen reinen Tensoren.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Es seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Seien außerdem $f \in \mathrm{End}(V)$ und $g \in \mathrm{End}(W)$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X) \quad \text{und} \quad \chi_g = \prod_{i=1}^n (\mu_i - X).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{f \otimes g}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einen Körper K.

a) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus von $\mathrm{End}(V)$ nach $V^* \bigotimes V$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass eine Linearform von $V^* \bigotimes V$ nach K existiert, welche $f \otimes v$ auf $f(v)$ abbildet.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildungen aus den Teilen a) und b) so gewählt werden können, dass die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen $f \in \mathrm{End}(V)$ auf $\mathrm{Spur}(f)$ abbildet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 12.07.2022, 12 Uhr.