

BLATT 7
(6.6.2023)

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbf{V}$ und $R \subseteq A \times A$ eine lineare Ordnung. Sei λ eine Kardinalzahl, so dass für alle $a \in A$ die Menge der R -Vorgänger $\{b \in A : bRa\}$ Mächtigkeit echt kleiner λ hat. Zeigen Sie $|A| \leq \lambda$.

Hinweis: Auch für linearen Ordnungen kann man Konfinalitäten definieren.

Aufgabe 2. Es sei $(A, <^A)$ eine Wohlordnung. Die Menge $\text{Def}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ heißt die *Menge der definierbaren Teilmengen von (A, \in)* und ist definiert durch

$$\text{Def}(A) = \left\{ X \subseteq A : \exists \{\in\}\text{-Formel } \varphi(v_0, \dots, v_n), \text{fr}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_n\}, \exists a_1, \dots, a_n \in A \right. \\ \left. X = \{a_0 \in A : (A, \in) \models \varphi(a_0, \dots, a_n)\} \right\}.$$

Die Formel $\varphi = \varphi(v_0, v_0, \dots, v_n)$ heißt *definierende Formel für X* . Die Laufvariable (hier v_0) wird in der Regel gekennzeichnet. Die Elemente (a_1, \dots, a_n) in φ heißen *Parameter*. Dasselbe $X \in \text{Def}(A)$ hat mehrere verschiedene definierende Formeln mit jeweiligen Parameter-Tupeln.

Gibt es eine Wohlordnung auf $\text{Def}(A)$?

Hinweis: Hierzu dürfen Sie ohne Beweis die folgende Wohlordnung $\leq_{\text{length,lex}}^A$ auf den Parameter-Tupeln benutzen: Für $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_m) \in A^{<\omega}$ ist

$$(a_1, \dots, a_n) \leq_{\text{length,lex}}^A (b_1, \dots, b_m),$$

falls

- (a) $n < m$ oder
- (b) $n = m$ und $\min\{k : a_k \neq b_k\} =: k_{\min}$ und $a_{k_{\min}} <^A b_{k_{\min}}$.

Nutzen Sie auch, dass die Menge der $\{\in\}$ -Formeln wohlgeordnet werden kann und dass man jedem $X \in \text{Def}(A)$ eine kleinste definierende Formel zuordnen kann.

Aufgabe 3. Es sei $f(\alpha) = \aleph_\alpha^\omega$ für alle α mit $\text{cf}(\alpha) = \omega$ bekannt. Bestimmen Sie in Abhängigkeit davon \aleph_α^ω für beliebiges α .

Aufgabe 4. Schätzen Sie die Komplexität folgender Formeln in der Lévy-Hierarchie nach oben ab (mit Hintergrundtheorie ZF):

- (a) „ x ist eine Ordinalzahl“.
- (b) „ x ist abzählbar“.
- (c) „ y ist die Potenzmenge von x “.

Bonus-Aufgabe. Für diese Aufgabe dürfen Sie den Satz von Löwenheim und Skolem und ein Lemma von Tarski benutzen über aufsteigende Folgen elementarer Substrukturen. Dieses sagt, dass die Vereinigung der aufsteigenden Folge ebenfalls eine elementare Substruktur ist.

Es seien \mathcal{L} eine abzählbare Sprache und $\mathfrak{B} = (\omega_1, (Z^{\mathfrak{B}} : Z \in \mathcal{L}))$ eine \mathcal{L} -Struktur. Wir schreiben $\alpha \preceq \mathfrak{B}$, falls es eine \mathcal{L} -Struktur

$$\mathfrak{A} = (\alpha, (Z^{\mathfrak{A}} : Z \in \mathcal{L})) \preceq \mathfrak{B}$$

gibt. Wir betrachten die Menge $C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \preceq \mathfrak{B}\}$.

- (a) Gibt es für alle $\beta < \omega_1$ ein $\alpha \in C$ mit $\beta < \alpha$?
- (b) Sei $B = \{a_i : i \in n\} \subseteq C$. Ist dann $\bigcup B \in C$?

Wer möchte, kann auch κ^+ anstelle von ω_1 betrachten. Dann können die B in (b) auch größer sein. Wie groß?