BLATT 8

(20.6.2023)

Aufgabe 1. Wir definieren $[\omega]^{<\omega} := \{x \subseteq \omega : x \text{ ist endlich}\}$ und die zweistellige Relation E_β auf ω für bijektive $\beta : \omega \to [\omega]^{<\omega}$ durch $nE_\beta m \Leftrightarrow n \in \beta(m)$. Betrachten wir nun die Struktur (ω, E_β).

a) Ist (ω, E_β) für $\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}) := \{n_1, \ldots, n_k\}$ fundiert?

b) Gibt es ein β, für das (ω, E_β) nicht das Fundierungsaxiom erfüllt?

c) Gibt es ein β, für das (ω, E_β) nicht fundiert ist, aber das Fundierungsaxiom erfüllt?

Aufgabe 2. Berechnen Sie den Mostowski-Kollaps folgender Strukturen:

a) $\mathfrak{A} = (\{\{\aleph_1\}, \{\aleph_2\}\}, \in)$,

b) $\mathfrak{B} = (\mathbf{V}, \emptyset)$,

c) $\mathfrak{C} = (\alpha, \in)$, für eine Ordinalzahl $\alpha > 0$.

Aufgabe 3. Sei $\in$ fundiert und extensional auf einer Klasse $\mathbf{A}$ und $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{A}$ eine transitive Unterklasse. Zeigen Sie, dass für den Mostowskikollaps G von $(\mathbf{A}, \in)$ gilt: $G(x) = x$ für alle $x \in T$.

Es sei $(P, \leq)$ eine Halbordnung. Eine Menge $G \subseteq P$ heißt *Filter auf* $(P, \leq)$ falls sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

i) G ist nicht leer, also $G \neq \emptyset$.

ii) G ist nach oben abgeschlossen, d.h., $(\forall p \in P)(\forall q \in G)(q \leq p \to p \in G)$.

iii) je zwei Elemente aus G *sind kompatibel*, d.h., $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)$.

Wir sagen eine Teilmenge $D \subseteq P$ *liegt dicht in* P oder D ist eine *dichte Teilmenge* von P, falls für alle $p \in P$ ein $d \in D$ mit $d \leq p$ existiert. Ist $G \subseteq P$ ein Filter und $\mathcal{D}$ eine Familie von dichten Teilmengen von P, so heißt G *$\mathcal{D}$-generisch*, wenn G jedes Element von $\mathcal{D}$ schneidet.

Rückseite beachten!

Abgabe bis Dienstag 27.6.2023, 10 Uhr.

Aufgabe 4. Wir definieren $[\omega]^\omega := \{x \subseteq \omega \ : \ x \text{ ist unendlich}\}$ und betrachten die Halbordnung $([\omega]^\omega, \subseteq)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} = \{A \in [\omega]^\omega \ : \ \omega \setminus A \text{ ist endlich}\}$ ein Filter ist.

b) Für welche $f : \omega \to \omega$ liegt die Menge

$$D_f := \{f''A \ : \ A \in [\omega]^\omega\}$$

dicht in P? *Hinweis:* Überprüfen Sie zunächst, für welche f es sich bei D_f überhaupt um eine Teilmenge von $[\omega]^\omega$ handelt.

c) Sei $\mathcal{D} = \{D_f \ : \ D_f \text{ ist dichte Teilmenge von } P\}$. Finden Sie einen $\mathcal{D}$-generischen Filter?

Abgabe bis Dienstag 27.6.2023, 10 Uhr.