Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 10

(4.7.2023)

Eine Halbordnung $\mathbb{P}$ heißt *abzählbar abgeschlossen*, falls für jede absteigende Kette $\langle p_n \;:\; n \in \omega\rangle$ von Elementen in $\mathbb{P}$ eine untere Schranke $p \in \mathbb{P}$ existiert, also

$$p_0 \geq_{\mathbb{P}} p_1 \geq_{\mathbb{P}} p_2 \geq_{\mathbb{P}} \cdots \geq_{\mathbb{P}} p.$$

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{P}$ eine abzählbar abgeschlossene Halbordnung, M eine transitive Menge, $\mathbb{P} \in M$, $|M| = \aleph_1$ und $p \in \mathbb{P}$. Gibt es dann einen $\mathbb{P}$-generischen Filter G über M mit $p \in G$?

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{P} \in \mathbf{V}$ eine Halbordnung mit schwächster Bedingung $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. Wir definieren induktiv über $(\mathbf{V}, \in)$ den folgenden $\mathbb{P}$-Namen

$$\hat{x} = \{\langle \hat{y}, p\rangle \;:\; y \in x, p \in \mathbb{P}\}.$$

Finden Sie ein $x \in \mathbf{V}$ und ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \Vdash \check{x} = \hat{x}$? Finden Sie eine Bedingung $p \in \mathbb{P}$, sodass dies für alle $x \in \mathbf{V}$ gilt?

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung. Zeigen Sie,

$$\begin{aligned}
x = y \quad &\rightarrow \quad \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash^* \check{x} = \check{y},\\
x \neq y \quad &\rightarrow \quad \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash^* \neg(\check{x} = \check{y}),\\
x \in y \quad &\rightarrow \quad \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash^* \check{x} \in \check{y},\\
x \notin y \quad &\rightarrow \quad \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash^* \neg(\check{x} \in \check{y}).
\end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie das Forcing*theorem.

Aufgabe 4. Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter über ω, der alle Mengen der Form $\omega \setminus x$ mit einem endlichen x als Elemente enthält. Wir betrachten die Halbordnung $(\mathbb{MA}(\mathcal{F}), \leq_{\mathbb{MA}})$, wobei $\mathbb{MA}(\mathcal{F}) = \{(s, A) \;:\; s \in [\omega]^{<\omega}, A \in \mathcal{F}, \max(s) < \min(A)\}$ und

$$(t, B) \leq_{\mathbb{MA}} (s, A) \Leftrightarrow t \supseteq s,\ B \subseteq A \ \text{ und } \ t \setminus s \subseteq A.$$

a) Geben Sie $\mathbb{1}_{\mathbb{MA}(\mathcal{F})}$ an.

b) Sind (s, A) und $(s, B) \in \mathbb{MA}(\mathcal{F})$ verträglich? Ist jede Antikette in $\mathbb{MA}(\mathcal{F})$ höchstens abzählbar?

c) Sei M abzählbar mit $\mathbb{MA}(\mathcal{F}) \in M$ und G ein $\mathbb{MA}(\mathcal{F})$-generischer Filter über M. In $M[G]$ gibt es das *G-generische real*

$$r := \bigcup\{s \;:\; \exists A\ (s, A) \in G\}.$$

Ist r unendlich? (Hier wird die Teilmenge r von ω “real” genannt.)

Rückseite beachten!

Abgabe bis Dienstag 11.7.2023, 10 Uhr.

d) (Bonus) Sei $\dot{r}_{gen}$ ein $\mathbb{MA}(\mathcal{F})$-Name für das generische real. Zeigen Sie, dass jede Auswertung des generischen reals (unabhängig von dem generischen Filter G) ein *Pseudoschnitt* aller Filterelemente ist, also

$$\mathbb{1}_{\mathbb{MA}(\mathcal{F})} \Vdash (\forall A \in \mathcal{F}, \dot{r}_{gen} \setminus A \text{ ist endlich}).$$

(Die Schreibweise $\mathbb{1}_{\mathbb{MA}(\mathcal{F})} \Vdash$ „$\forall A \in \mathcal{F}, \dot{r}_{gen} \setminus A$ ist endlich“ statt der Klammern auf der rechten Seite ist bei weitem häufiger.)

Abgabe bis Dienstag 11.7.2023, 10 Uhr.