Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Hannes Jakob

BLATT 04

13.05.2025

Abgabe am Dienstag, 20.05.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1. Wir betrachten den topologischen Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 4 auf dem Anwesenheitsblatt. Zur Erinnerung: Die Grundmenge X besteht aus allen Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, eine Basis der Topologie ist durch die Mengen $[s] := \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid s \sqsubset f\}$ gegeben, wobei für $s\colon \{0,\dots,n-1\} \to \{0,1\}$ gilt, dass $s \sqsubset f$ genau dann, wenn $f \restriction \{0,\dots,n-1\} = s$.

1. Ist der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der angegebenen Topologie diskret?
2. Ist der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der angegebenen Topologie total unzusammenhängend?

Aufgabe 2. Es sei $(X,\mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A,B \subseteq X$. Weiterhin seien A und B wegzusammenhängend (in der Spurtopologie) und $A \cap B \neq \emptyset$. Ist $A \cup B$ wegzusammenhängend?

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie (die durch die Standardmetrik erzeugt wird). Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die injektiv ist?

Aufgabe 4. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $(X_n,\mathscr{O}_n) = (\mathbb{R},\mathscr{O})$, wobei $\mathscr{O}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ sei. Wir betrachten $X = \prod_n X_n$ mit der Boxtopologie (siehe Aufgabe 4 auf Blatt 03; diese wird durch $\{\prod_n U_n \mid \forall n \in \mathbb{N}(U_n \subseteq X_n \wedge U_n \in \mathscr{O}_n)\}$ erzeugt). Ist der Raum X zusammenhängend?