# Topologie

Mildenberger
Sommersemester 25

Fassung vom 05.09.2025, compiled 5. September 2025

# Inhaltsverzeichnis


**I Mengentheoretische Topologie** **5**

**1 Topologische Räume und stetige Abbildungen** **7**
1.1 Topologische Räume . . . . . 7
1.2 Stetige Abbildungen . . . . . 13

**2 Erzeugung topologischer Räume** **15**
2.1 Die Spurtopologie . . . . . 15
2.2 Die Produkttopologie . . . . . 17
2.3 Die Initialtopologie . . . . . 19
2.4 Die Finaltopologie . . . . . 20
2.5 Der Summenraum . . . . . 23
2.6 Anheften oder Zusammenkleben von Räumen . . . . . 23

**3 Zusammenhängende und wegzusammenhängende Räume** **25**

**4 Filter und Konvergenz** **33**

**5 Trennungseigenschaften** **39**

**6 Normale und T4-Räume** **51**

**7 Kompaktheit** **57**

**8 Satz von Stone-Weierstraß** **63**

**9 Uniforme Räume** **69**

**II Algebraische Topologie** **71**

**10 Quotienten und Gruppenoperationen** **73**
10.1 Quotienten nach Gruppenoperationen . . . . . 76

**11 Homotopie** **83**
11.1 Die Fundamentalgruppe . . . . . 87
11.2 Die Fundamentalgruppe als Funktor . . . . . 90
11.2.1 Die Rolle des Basispunktes . . . . . 92
11.3 Lokale Produkte und Überlagerungen . . . . . 96
11.4 Retraktionen . . . . . 104
11.5 Das freie Produkt . . . . . 106

**12 Dank** **109**

# Teil I

# Mengentheoretische Topologie

# Kapitel 1

# Topologische Räume und stetige Abbildungen

## 1.1 Topologische Räume

**Definition 1.1.** Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Metrik auf* $X$, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $(\forall x, y \in X)\ (d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y)$.
2. $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = d(y,x)$.
3. $(\forall x, y, z \in X)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Eigenschaft 3 nennt man auch *Dreiecksungleichung*.

**Definition 1.2.** Ein Paar $(X, d)$ heißt *metrischer Raum*, wenn $X \neq \emptyset$ eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik auf $X$ ist.

*Beispiele* 1.3.

1. $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x - y|$.
2. $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.
3. $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \bar{x} = \bar{y}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

**Definition 1.4.** Eine Teilmenge $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Topologie auf* $X$, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\emptyset \in \mathscr{O}$ und $X \in \mathscr{O}$.
2. $\mathscr{O}$ ist gegen endliche Schnitte abgeschlossen, d.h.
$$\forall \mathscr{B} \subseteq \mathscr{O} \left( |\mathscr{B}| \in \mathbb{N} \to \bigcap \mathscr{B} = \bigcap_{O \in \mathscr{B}} O \in \mathscr{O} \right).$$
3. $\mathscr{O}$ ist gegen beliebige Vereinigungen abgeschlossen, d.h.
$$\forall \mathscr{B} \subseteq \mathscr{O} \bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B \in \mathscr{O}.$$

*Bemerkung* 1.5. Wir verwenden die folgende Konvention:
$$\bigcup_{i \in \emptyset} O_i = \emptyset, \quad \bigcap_{i \in \emptyset} O_i = X.$$

**Definition 1.6.** Ein Paar $(X, \mathscr{O})$ heißt *topologischer Raum*, wenn $X$ eine Menge und $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{P}(X)$ eine Topologie auf $X$ ist.

**Definition 1.7.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Menge $O$ heißt *offen*, wenn $O \in \mathscr{O}$.
Eine Menge $A$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A \in \mathscr{O}$. Das System aller abgeschlossenen Mengen wird mit $\mathscr{A}$ bezeichnet.

**Definition 1.8.** Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(X, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume. Falls $\mathscr{O}_1 \subseteq \mathscr{O}_2$, so sagen wir „$\mathscr{O}_2$ ist feiner als $\mathscr{O}_1$“ und „$\mathscr{O}_1$ ist gröber als $\mathscr{O}_2$“.

Beispiele: Denken Sie an $X = \mathbb{R}$. Welche Topologien auf $\mathbb{R}$ kennen Sie? Erinnern Sie sich an die Definition einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ aus der Analysis?

**Definition 1.9.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ heißt *Basis von* $\mathscr{O}$, wenn
$$\mathscr{O} = \left\{ Y \in \mathscr{P}(X) \mid \exists B \subseteq \mathscr{B} \left( Y = \bigcup B \right) \right\}.$$
Eine Teilmenge $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{O}$ heißt *Subbasis von* $\mathscr{O}$, wenn
$$\mathscr{B} := \left\{ Y \in \mathscr{P}(X) \mid \exists \mathscr{A} \subseteq \mathscr{S} \left( |\mathscr{A}| \in \mathbb{N} \wedge \bigcap \mathscr{A} = Y \right) \right\}$$
eine Basis von $\mathscr{O}$ ist.

**Lemma 1.10.** *Jede Teilmenge $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ist Subbasis einer Topologie.*

**Lemma 1.11.** *Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ist Basis einer Topologie, wenn*

$$\forall A \subseteq \mathscr{B} \left( |A| \in \mathbb{N} \to \exists B \subseteq \mathscr{B}, \bigcup B = \bigcap A \right),$$

*resp. wenn*

$$\forall A \subseteq \mathscr{B} \left( |A| \in \mathbb{N} \to \forall x \in \bigcap A,\ \exists B \in \mathscr{B},\ x \in B \subseteq \bigcap A \right).$$

*Beweis:* Es sei $\mathscr{O}$ definiert durch

$$\mathscr{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in O \exists B \in \mathscr{B}\ x \in B \subseteq O\}$$

Wir zeigen, dass $\mathscr{O}$ eine Topologie und $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{O}$ ist.
Wenn wir in der obigen Definition $A = \emptyset$ nehmen, folgt nach unsere Konvention, dass es $B \subseteq \mathscr{B}$ gibt, sodass $\bigcup B = \bigcap A = \bigcap \emptyset = X$. Insbesondere gibt es für jedes $x \in X$ ein $B \in \mathscr{B}$, sodass $x \in B$. $B \subseteq X$ ist klar. Also gilt $X \in \mathscr{O}$. $\emptyset \in \mathscr{O}$ gilt, da jede Aussage $\forall x \in \emptyset$, $\varphi(x)$ wahr ist, egal, was $\varphi$ ist.
Es sei $A \subseteq \mathscr{O}$ endlich und $x \in \bigcap A$. Dann folgt aus der Voraussetzung direkt, dass ein $B$ existiert wie gefordert. Also ist, da $x$ beliebig war, $\bigcap A \in \mathscr{O}$.
Es sei $A \subseteq \mathscr{O}$ beliebig und o.B.d.A. nicht leer. Es sei $x \in \bigcup A$ und $Y \in A$, sodass $x \in Y$. Es sei $B \in \mathscr{B}$, sodass $x \in B \subseteq Y$ (da $Y \in \mathscr{O}$). Dann ist $x \in B \subseteq Y \subseteq \bigcup A$. Also ist, da $x$ beliebig war, $\bigcup A \in \mathscr{O}$.
$\mathscr{O}$ ist demnach eine Topologie.
Es sei $Y \in \mathscr{O}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert damit für jedes $x \in Y$ ein $B_x \in \mathscr{B}$, sodass $x \in B_x \subseteq Y$. Also ist $Y = \bigcup_{x \in Y} B_x$ und

$$\mathscr{O} \subseteq \left\{ Y \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \subseteq \mathscr{B} \left( Y = \bigcup B \right) \right\}.$$

Die andere Inklusion folgt daraus, dass $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ und $\mathscr{O}$ unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. □

**Lemma 1.12** (und Definition)**.** *Jeder metrische Raum $(X, d)$ trägt eine Topologie, die von den offenen $\varepsilon$-Umgebungen erzeugt wird. Hierbei bezeichnet $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ die offene $\varepsilon$-Umgebung von $x$. Eine Basis der metrischen Topologie ist*

$$\mathscr{B} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}.$$

*Es ist also $\mathscr{O}_d$ durch beliebige Vereinigungen erzeugt:*

$$\mathscr{O}_d := \left\{ Y \subseteq X \mid \exists B \subseteq \mathscr{B} \left( Y = \bigcup B \right) \right\}.$$

*Die Topologie $\mathscr{O}_d$ heißt die* von der Metrik $d$ erzeugte Topologie auf $X$.

*Beweis:* Wir überprüfen, dass $\mathscr{O}_d = \mathscr{O}$ eine Topologie auf $X$ definiert:

1. Es gilt $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathscr{O}$ und $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x) \in \mathscr{O}$.

2. Zunächst stellen wir fest, dass allgemein $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} A_i \cap B_j$ gilt. Also reicht es zu zeigen, dass es für $x_1, x_2 \in X$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Menge $B \subseteq \mathscr{B}$ gibt, so dass $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) = \bigcup B$.
   1. Fall: $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) = \emptyset = \bigcup \emptyset$.
   2. Fall: Falls $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) =: A$, so wähle

   $$\varepsilon(z) := \min \{\varepsilon_1 - d(z, x_1), \varepsilon_2 - d(z, x_2)\} > 0.$$

   Dann gilt $B_{\varepsilon(z)}(z) \subseteq A$ (man verwendet die Dreiecksungleichung). Es folgt

   $$A = \bigcup_{z \in A} B_{\varepsilon(z)}(z).$$

3. Klar, da Vereinigungen von Vereinigungen wieder Vereinigungen sind.

□

*Frage* 1.13. Gibt es einen topologischen Raum $(X, \mathscr{O})$, so dass $\mathscr{O}$ nicht von einer Metrik erzeugt wird? Hier findet man leicht Gegenbeispiele. Schwerer ist die folgende Frage: Gibt es einen Hausdorff Raum $(X, \mathscr{O})$ mit abzählbaren Umgebungsbasen, so dass $\mathscr{O}$ nicht von einer Metrik erzeugt wird? Wenn Sie interessiert sind, schlagen Sie unter Bing, Nagata, Smirnov nach.

*Beispiele* 1.14 (Topologische Räume).

1. Die *indiskrete Topologie* auf $X$: $\mathscr{O} = \{\emptyset, X\}$ ist die gröbste Topologie auf $X$. Sie ist nicht metrisierbar, falls $X$ mindestens zwei Elemente enthält, aber pseudometrisierbar.
   (Eine *Pseudometrik* ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Metrikeigenschaften 2 und 3 erfüllt, aber anstelle von Eigenschaft 1 nur $\forall x \in X\ d(x, x) = 0$.)

2. Die *diskrete Topologie* auf $X$: $\mathscr{O} = \mathscr{P}(X)$, oder äquivalent $\forall x\ (\{x\} \in \mathscr{O})$, ist die feinste Topologie auf $X$. Sie ist metrisierbar durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

3. Falls $(X, <)$ eine lineare Ordnung ist (d.h. $<$ ist transitiv, irreflexiv und konnex), so ist

$$\mathscr{B} := \{(a,b) \mid a, b \in X\}$$

eine Basis der *Ordnungstopologie* auf $X$, wobei

$$(a,b) := \{x \in X \mid a < x < b\}.$$

4. Die *kofinite Topologie* auf $X$: $\mathscr{O}_{\text{kofinit}} := \{X \smallsetminus A \mid A \subseteq X,\ A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$.

5. Die *Standardtopologie* auf $\mathbb{R}$: Dies ist die Ordnungstopologie von $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ und auch die von der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^n$ wird die Standardtopologie durch die zweite (und auch weitere andere Metriken) Metrik in Beispiel 1.3 gegeben.

6. Die *Sorgenfrey-Gerade*: $X = \mathbb{R}$, eine Subbasis ist durch die halboffenen Intervalle $\{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Wir behaupten, dass die Topologie der Sorgenfrey-Gerade echt feiner ist als die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$:
Es gilt $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$, also ist eine Basis der Standardtopologie in der Topologie der Sorgenfrey-Gerade enthalten. Damit gilt das auch für die gesamte Standardtopologie.

**Definition 1.15.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung von* $x$, wenn $\exists O\,(O \subseteq U \wedge x \in O \wedge O \in \mathscr{O})$.
Die Menge $\mathscr{U}(x) := \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt *Umgebungssystem von* $x$.

**Definition 1.16.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Umgebungsbasis von* $x$, wenn $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}(x)$ und $\forall A \in \mathscr{U}(x)\ \exists B \in \mathscr{B}\ (B \subseteq A)$.

Wir erinnern an die Definition der Abzählbarkeit vom ersten Aufgabenblatt. Eine Menge $A$ heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Funktion $f\colon A \to \mathbb{N}$ gibt.

**Definition 1.17.** Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.
Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn $\mathscr{O}$ eine abzählbare Basis hat.

*Beispiel* 1.18. Der topologische Raum $(X, \mathscr{O}_{<_{\mathbb{R}}})$ besitzt $\{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{Q}\}$ als Basis, erfüllt also das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

**Definition 1.19.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Das *offene Innere von* $A \subseteq X$ ist

$$\mathring{A} := \bigcup \{O \in \mathscr{O} \mid O \subseteq A\}\,.$$

Der *Abschluss von* $A \subseteq X$ ist

$$\bar{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \mathscr{U}(x)\, U \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

Der *Rand von* $A$ ist

$$\partial A := \bar{A} \smallsetminus \mathring{A}.$$

Es sei $Y \subseteq X$. Eine Menge $A \subseteq Y$ heißt *dicht in* $Y$, wenn $\bar{A} \supseteq Y$ gilt.
Eine Menge $A$ heißt *nirgends dicht*, wenn $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$ gilt.

*Beispiel* 1.20 (Das Cantor'sche Diskontinuum). Für $X \subseteq \mathbb{R}$ sei $2 + X = \{2 + x : x \in X\}$ und $\frac{1}{3}X = \{\frac{x}{3} : x \in X\}$. Es sei $A_0 = [0, 1]$ in den reellen Zahlen, und für $n \geq 0$ sei

$$A_{n+1} := \frac{1}{3}(A_n \cup (2 + A_n)),$$

$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_n$. Jedes $A_n$ is abgeschlossen. Dann ist $C$ abgeschlossen, also $\bar{C} = C$, aber $\mathring{C} = \emptyset$. Also ist $C$ nirgends dicht. Interessanterweise ist $C$ aber trotzdem nicht abzählbar, sondern sogar gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

## 1.2 Stetige Abbildungen

**Definition 1.21.** Es seien $X, Y$ Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für $A \subseteq X$ sei $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$. Für $B \subseteq Y$ sei $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Es sei wiederum $A \subseteq X$. Die *Einschränkung von $f$ auf $A$* ist die Funktion $f \restriction A\colon A \to Y$, definiert durch $(f \restriction A)(x) = f(x)$ für $x \in A$. In Mengenschreibweise: $f \restriction A := f \cap (A \times Y)$.

**Definition 1.22.** Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(Y, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn

$$\forall O \in \mathscr{O}_2,\ f^{-1}[O] \in \mathscr{O}_1.$$

Es sei $x \in X$. Dann heißt $f$ *stetig in $x$*, wenn

$$\forall V \in \mathscr{U}_{\mathscr{O}_2}(f(x)), f^{-1}[V] \in \mathscr{U}_{\mathscr{O}_1}(x).$$

*Bemerkung* 1.23. Um zu zeigen, dass $f$ stetig ist, genügt es nach den Rechenregeln für $f^{-1}$, zu zeigen, dass $f^{-1}[\mathscr{S}_2] \subseteq \mathscr{O}_1$ gilt für eine Subbasis $\mathscr{S}_2$ von $\mathscr{O}_2$.

**Definition 1.24.** Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(Y, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, wenn

$$\forall O \in \mathscr{O}_1,\ f[O] \in \mathscr{O}_2.$$

Die Abbildung $f$ heißt *abgeschlossen*, wenn

$$\forall A \text{ abgeschlossen in } \mathscr{O}_1,\ f[A] \text{ abgeschlossen in } \mathscr{O}_2.$$

**Definition 1.25.** Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(Y, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn $f$ bijektiv ist und $f$ sowie $f^{-1}$ stetig sind.

# Kapitel 2

# Erzeugung topologischer Räume

## 2.1 Die Spurtopologie

**Definition 2.1.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.
Dann heißt $\mathscr{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathscr{O}\}$ die *Unterraumtopologie* (oder *Spurtopologie*) *von* $(X, \mathscr{O})$ *auf* $A$.

**Lemma 2.2.** *Die Unterraumtopologie* $\mathscr{O}_A$ *ist tatsächlich eine Topologie auf* $A$.

*Beweis:*

1. $A = A \cap X \in \mathscr{O}_A$ und $\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathscr{O}_A$.
2. Es seien $U_1, U_2 \in \mathscr{O}$. Dann ist $(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathscr{O}_A$.
3. Es sei $I$ eine beliebige Indexmenge und seien $U_i \in \mathscr{O}$ für alle $i \in I$.
   Dann ist $\bigcup \{A \cap U_i \mid i \in I\} = A \cap \bigcup \{U_i \mid i \in I\} \in \mathscr{O}_A$.

$\square$

**Definition 2.3.** Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *diskret in* $(X, \mathscr{O})$, wenn $(A, \mathscr{O}_A)$ die diskrete Topologie auf $A$ ist.

**Lemma 2.4.** *Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *ist diskret in* $(X, \mathscr{O})$ *genau dann, wenn*

$$\forall a \in A \, \exists O \in \mathscr{U}(a) \; ((A \setminus \{a\}) \cap O = \emptyset) \, .$$

**Definition 2.5.** Eine Abbildung $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (X', \mathscr{O}')$ heißt *Einbettung*, wenn

$$f\colon (X, \mathscr{O}) \to \left(f[X], \mathscr{O}'_{f[X]}\right)$$

ein Homöomorphismus ist.

**Satz 2.6.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ und $\iota\colon U \to X$ die Inklusionsabbildung.*

1. *$\forall\, (Y, \mathscr{O}_Y)\ \forall g\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to (U, \mathscr{O}_U)$ gilt: $g$ ist stetig genau dann, wenn*

$$\iota \circ g\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O})$$

*stetig ist.*

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathscr{O}_Y) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\iota \circ g"'] & (U, \mathscr{O}_U) \arrow[d, "\iota = Inklusion"] \\
& (X, \mathscr{O})
\end{tikzcd}$$

2. *Die Inklusion $\iota\colon (U, \mathscr{O}_U) \to (X, \mathscr{O})$ ist stetig und eine Einbettung (i.A. aber nicht offen) und $\mathscr{O}_U$ ist die gröbste Topologie auf $U$, für die $\iota$ stetig ist.*

*Beweis:*

1. Zuerst gilt

$$(\iota \circ g)^{-1}[B] = \left(g^{-1} \circ \iota^{-1}\right)[B] = g^{-1}[B \cap U].$$

Wenn $g$ stetig ist, so ist $g^{-1}[B \cap U] \in \mathscr{O}_Y$ und damit auch $(\iota \circ g)^{-1}[B] \in \mathscr{O}_Y$, also ist $(\iota \circ g)$ stetig.
Falls $(\iota \circ g)$ stetig ist, so ist $g^{-1}[B \cap U] \in \mathscr{O}_U$ für alle $B \cap U$ mit $B \in \mathscr{O}$, und damit ist $g$ stetig.

2. Es gilt $\forall B \in \mathscr{O}\ \iota^{-1}[B] = [B \cap U] \in \mathscr{O}_U$. Weiterhin, sei $\mathscr{O}'$ eine weitere Topologie auf $U$, sodass $\iota$ stetig ist, so gilt

$$\forall B \in \mathscr{O}\ B \cap U = \iota^{-1}[B] \in \mathscr{O}'$$

und da jedes $A \in \mathscr{O}_U$ die Gestalt $B \cap U$ für $B \in \mathscr{O}$ hat, gilt $\mathscr{O}_U \subseteq \mathscr{O}'$.

□

*Beispiel* 2.7. Auf der Urbildseite hat der Übergang zur Spurtopologie großen Einfluss: Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon\ (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<) &\to (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<) \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Die eingeschränkte Funktion $f \restriction \mathbb{Q}\colon \left(\mathbb{Q}, (\mathscr{O}_<)_{\mathbb{Q}}\right) \to (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<)$ ist stetig, da sie konstant ist, aber $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<) \to (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<)$ ist nicht stetig.

**Satz 2.8.** *Es seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \mathscr{O}')$ topologische Räume und seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen, so dass $\bigcup_{i \leq n} A_i = X$. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass $f \restriction A_i\colon (A_i, \mathscr{O}_{A_i}) \to (Y, \mathscr{O}')$ stetig ist für jedes $i$.*
*Dann ist $f$ stetig.*

*Beweis:* $f$ ist stetig genau dann, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist:

$$f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \smallsetminus (Y \smallsetminus A)] = X \smallsetminus f^{-1}[Y \smallsetminus A].$$

Es sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Für jedes $i$ ist$(f \restriction A_i)^{-1}[B]$ abgeschlossen, da $B$ abgeschlossen (in der Spurtopologie) und $f \restriction A_i$ bzgl. der Spurtopologie stetig ist. Es gibt daher ein abgeschlossenes $C_i$, so dass $C_i \cap A_i = (f \restriction A_i)^{-1}[B]$. Dann gilt

$$f^{-1}[B] = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f^{-1}[B] \cap A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (f \restriction A_i)^{-1}[B] = \bigcup_{i=1}^{n} (C_i \cap A_i).$$

Die endliche Vereinigung ist abgeschlossen. □

## 2.2 Die Produkttopologie

Nun definieren wir kartesische Produkte mit beliebig vielen (mengenvielen) Faktoren.

**Definition 2.9** (mit Auswahlaxiom)**.** Es sei $I$ eine beliebige Indexmenge und sei für $i \in I$ $X_i$ eine nicht leere Menge. Dann ist

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f\colon I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} \mid \forall i \in I, f(i) \in X_i\}$$

die Produktmenge. Man schreibt statt $f$ auch $\langle x_i : i \in I \rangle$, wenn $f(i) = x_i$.

**Definition 2.10.** Wie oben sei $I$ eine Indexmenge und für $i \in I$ sein $X_i$ eine Menge. Es sei $i \in I$. Die Funktion $p_i \colon \prod_{j \in I} X_j \to X_i$ mit $p_i(\langle x_j : j \in I \rangle) = x_i$ heißt die Projektion auf $X_i$.

Auf der Menge $\prod_{i \in I} X_i$ möchte man nun aus den einzelnen Topologien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ eine in geeignetem Maßen feine Topologie definieren. Es gibt mehrere recht natürliche Kandidaten.

**Definition 2.11.** Es sei $I$ eine beliebige Indexmenge und seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für alle $i \in I$. Dann ist

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid (\forall i \in I)\, U_i \in \mathscr{O}_i, \text{ und es gibt nur endlich viele } i, \text{ sodass } U_i \neq X_i \right\}$$

Basis einer Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, der sogenannten *Produkttopologie*.

**Lemma 2.12.** *$\mathscr{B}$ ist tatsächlich eine Basis.*

*Beweis:* $\left(\prod_{i \in I} U_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} V_i\right) = \prod_{i \in I} (U_i \cap V_i)$ und $U_i \cap V_i \neq X_i$ für nur endlich viele $i$. Eine endliche Menge ergibt sich als Vereinigung der Menge der $i \in I$, in denen $U_i \neq X_i$, mit der Menge der $j \in I$, in denen $V_j \neq X_j$. □

*Bemerkung* 2.13. Eine Subbasis ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &:= \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid \text{ es gibt genau ein } i \in I, \text{ sodass } U_i \neq X_i \right\} \\ &= \left\{ p_i^{-1}[U_i] \mid U_i \in \mathscr{O}_i \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist für $i \in I$ die Abbildung $p_i \colon \prod_{j \in I} U_j \to U_i$, $p_i((x_j)_{j \in I}) := x_i$ die Projektion auf die $i$-te Koordinate.

### Die Produkttopologie, aufgefasst als Initialtopologie

**Satz 2.14.** *Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, sodass alle Projektionen $p_i$ stetig sind. Alle Projektionen sind offene Abbildungen.*

*Beweis:* Alle $p_i$ sind stetig, da $p_i^{-1}[U_i] = \prod_{j \in I} U_j$, wobei $U_j = X_j$ für $j \neq i$. Falls $\mathscr{O}$ eine andere Topologie auf dem Produkt ist, bezüglich der alle $p_i$ stetig sind, so enthält $\mathscr{O}$ die Subbasis der Produkttopologie, also auch die gesamte Produkttopologie. Für die Offenheit: Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq \prod_i X_i$ sei $U = \bigcup_{j \in J} \prod_i U_i^j$. Dann ist $p_i[U] = \bigcup_{j \in J} U_i^j$, was demnach offen ist. □

**Satz 2.15.** *$g\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to \prod_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i)$ ist genau dann stetig, wenn $p_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

*Beweis:* Zunächst wissen wir, dass es genügt, wenn Urbilder einer Subbassis in der Topologie enthalten sind (nach den Rechenregeln für Schnitte und Vereinigungen). Dann gilt

$$g^{-1}[{p_i}^{-1}[U_i]] = (p_i \circ g)^{-1}[U_i]$$

und die Behauptung folgt. □

**Definition 2.16.** Es sei $I$ eine Indexmenge und seien $f_i\colon (X_i, \mathscr{O}_i) \to (Y_i, \mathscr{O}_i')$ Abbildungen für alle $i \in I$. Wir definieren die *Produktabbildung $f$ der $f_i$* durch

$$f\colon \prod_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i) \to \prod_{i\in I} (Y_i, \mathscr{O}_i'),$$

$$f(\langle x_i \mid i \in I\rangle) := \langle f_i(x_i) \mid i \in I\rangle.$$

**Satz 2.17.** *Es seien für $i \in I$, $X_i \neq \emptyset$, $Y_i \neq \emptyset$. Die Produktabbildung*

$$f\colon \prod_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i) \to \prod_{i\in I} (Y_i, \mathscr{O}_i')$$

*ist genau dann stetig, wenn $f_i\colon (X_i, \mathscr{O}_i) \to (Y_i, \mathscr{O}_i')$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

*Beweis:* Es bezeichnen $p_i$ und $q_i$ die $i$-te Projektionsabbildung für $\prod_{j\in I} X_j$ bzw. $\prod_{j\in I} Y_j$.
Es seien alle $f_i$ stetig. Es gilt $q_i \circ f = f_i \circ p_i$. Weil alle $p_i$ stetig sind, ist $f_i \circ p_i$ und damit $q_i \circ f$ für alle $i$ stetig. Es folgt, dass $f$ stetig ist.
Es sei umgekehrt $f$ stetig. Also ist $q_i \circ f$ und damit $f_i \circ p_i$ stetig für alle $i$. Für alle $i$ ist $(f_i \circ p_i)^{-1}[U]$ offen, also ist $p_i^{-1}[f_i^{-1}[U]]$ offen in $X_i$. Damit ist $f_i^{-1}[U]$ offen. □

## 2.3 Die Initialtopologie

**Definition 2.18.** Es sei $Y$ eine Menge, $I$ eine Indexmenge und seien $f_i\colon Y \to (X_i, \mathscr{O}_i)$ Funktionen in topologische Räume $(X_i, \mathscr{O}_i)$ für alle $i \in I$. Dann heißt die durch die Subbasis

$$\mathscr{S} := \left\{ f_i^{-1}[U_i] \mid U_i \in \mathscr{O}_i, i \in I \right\}$$

auf $Y$ erzeugte Topologie die *Initialtopologie von* $\big(Y, (f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}\big)$.

*Bemerkung* 2.19. Falls $I = \emptyset$ ist, so erhält man $\mathscr{S} = \emptyset$ und als Initialtopologie $\{\emptyset, Y\}$. Falls $Y = \emptyset$ ist, so ist $f_i = \emptyset$ für alle $i$ und wir erhalten $\mathscr{S} = \{\emptyset\}$ und $\{\emptyset\}$ als Initialtopologie.

*Bemerkung* 2.20. Es sei $\mathscr{O}_Y$ die Initialtopologie von $\big(Y, (f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}\big)$. Dann sind alle $f_i\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X_i, \mathscr{O}_i)$ stetig, aber im Allgemeinen nicht offen.

**Satz 2.21.** *Es sei $\mathscr{O}_Y$ die Initialtopologie von $\big(Y, (f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}\big)$. Dann ist $\mathscr{O}_Y$ die gröbste Topologie auf $Y$, sodass alle Abbildungen $f_i$ stetig sind. Für jede Abbildung*

$$g\colon (Z, \mathscr{O}_Z) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$$

*gilt: $g$ ist genau dann stetig, wenn $f_i \circ g$ für alle $i$ stetig ist.*

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathscr{O}_Z) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & (Y, \mathscr{O}_Y) \arrow[d, "f_i"] \\
& (X_i, \mathscr{O}_i)
\end{tikzcd}$$

*Beweis:* Es sei $\mathscr{O}'$ eine weitere Topologie auf $Y$, sodass alle $f_i$ stetig sind. Dann gilt $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{O}'$ und damit $\mathscr{O}_Y \subseteq \mathscr{O}'$.
Die Vorwärtsrichtung der zweiten Behauptung folgt daraus, dass die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist.
Es seien umgekehrt alle $f_i \circ g$ stetig. Es genügt zu überprüfen, dass die Urbilder der Mengen der genannten Subbasis unter $g$ offen sind: Für alle $i \in I$ und $U \in \mathscr{O}_i$ gilt

$$g^{-1}[f_i^{-1}[U]] = (f_i \circ g)^{-1}[U] \in \mathscr{O}_Z.$$

Demnach ist $g$ stetig.

□

## 2.4 Die Finaltopologie

**Definition 2.22.** Es sei $Y$ eine Menge, $I$ eine Indexmenge und seien $f_i\colon (X_i, \mathscr{O}_i) \to Y$ Funktionen auf topologischen Räumen $(X_i, \mathscr{O}_i)$ für alle $i \in I$. Dann heißt die durch die Subbasis

$$\mathscr{S} := \big\{O \subseteq Y \mid \forall i \in I\ f_i^{-1}[O] \in \mathscr{O}_i\big\}$$

auf $Y$ erzeugte Topologie die *Finaltopologie von* $\big((f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}, Y\big)$.

**Satz 2.23.** *Es sei $\mathscr{O}_Y$ die Finaltopologie von $\big((f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}, Y\big)$. Dann ist $\mathscr{O}_Y$ die feinste Topologie auf $Y$, sodass alle Abbildungen $f_i$ stetig sind. Für jede Abbildung*

$$g\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to (Z, \mathscr{O}_Z)$$

*gilt: $g$ ist genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für alle $i$ stetig ist.*

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathscr{O}_Y) \arrow[r, "g"] & (Z, \mathscr{O}_Z) \\
(X_i, \mathscr{O}_i) \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "g\circ f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

*Beweis:* Es sei $\mathscr{O}'$ eine weitere Topologie auf $Y$, sodass alle $f_i$ stetig sind. Dann wählen wir $g = \mathrm{id}$. Es folgt, dass $g \circ f_i = f_i$ stetig ist. Demnach ist auch id stetig und $\mathscr{O}' = \mathrm{id}[\mathscr{O}'] \subseteq \mathscr{O}_Y$.
Wenn $g$ stetig ist, sind auch alle $g \circ f_i$ stetig, da ja nach Voraussetzung alle $f_i$ stetig sind. Es seien umgekehrt alle $g \circ f_i$ stetig. Es sei nun $U \in \mathscr{O}_Z$, dann gilt für alle $i \in I$, dass

$$f_i^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f_i)^{-1}[U] \in \mathscr{O}_i,$$

und damit ist $g^{-1}[U] \in \mathscr{S} \subseteq \mathscr{O}_Y$.

□

*Beispiel* 2.24. Es sei $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation (d.h. $R$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv). Für $x \in X$ sei

$$[x]_R := \{z \in X \mid zRx\}$$

die Äquivalenzklasse von $x$ in $(X, R)$. Für $x, y \in X$ gilt stets $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon X &\to {}^{X}/_{R} \\ x &\longmapsto [x]_R \end{aligned}$$

heißt *Quotientenabbildung*.

**Definition 2.25.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $R$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $p$ die zugehörige Projektion. Die *Quotiententopologie* auf ${}^{X}/_{R}$ von $((p, X, \mathscr{O}), {}^{X}/_{R})$ ist definiert als

$$\mathscr{O}_{X/R} = \left\{ A \subseteq {}^{X}/_{R} \mid p^{-1}[A] \in \mathscr{O} \right\}.$$

*Bemerkung* 2.26. Die durch $((p, X, \mathscr{O}), {}^{X}/_{R})$ gegebene Finaltopologie ist gerade die Quotiententopologie $\mathscr{O}_{X/R}$.

*Beispiel* 2.27. Es sei $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}')$ eine stetige Abbildung. Wir definieren

$$xRx' :\Longleftrightarrow f(x) = f(x').$$

Dann ist $\bar{f}\colon {}^{X}/_{R} \to Y$ durch $\bar{f}([x]_R) := f(x)$ wohldefiniert, denn, wenn $[x]_R = [y]_R$, so ist $f(x) = f(y)$, da $xRy$. $\bar{f}$ ist sogar injektiv, denn, wenn $\bar{f}([x]_R) = \bar{f}([y]_R)$, so ist $f(x) = f(y)$, $xRy$ und $[x]_R = [y]_R$.

**Satz 2.28.** *Es sei $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ stetig und $R$ wie oben definiert. Dann ist $\bar{f}\colon \left({}^{X}/_{R}, \mathscr{O}_{X/R}\right) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ stetig.*

Im Diagramm hat man folgende Situation.

$$\begin{tikzcd}
\left({}^{X}/_{R}, \mathscr{O}_{X/R}\right) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \left(f[X], (\mathscr{O}_Y)_{f[X]}\right) \arrow[d, "\iota = Inklusion"] \\
(X, \mathscr{O}) \arrow[u, "p"] \arrow[r, "f"] & (Y, \mathscr{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

*Beweis:* Erster Beweis für die Stetigkeit: Es sei $A \in \mathcal{O}_Y$. Es ist $f = \bar{f} \circ p$. Dann ist $\bar{f}^{-1}[A] \in \mathcal{O}_{X/R}$, da $p^{-1}[\bar{f}^{-1}[A]] = (\bar{f} \circ p)^{-1}[A] = f^{-1}[A] \in \mathcal{O}$.

Beweis mit Diagramm: Weil $f = \bar{f} \circ p$, folgt dies aus dem Satz über die Finaltopologie: $\bar{f}$ ist stetig genau dann, wenn $f = \bar{f} \circ p$ stetig ist. Im unteren Dreieck ist das Diagramm aus Satz 2.23 über die Finaltopologie, um oberen Dreieck das Diagramm aus dem Satz 2.6 von der Spurtopologie als Initialtopogie. □

**Definition 2.29.** Es seien $f$ und $R$ wie oben. Wenn $\bar{f}\colon \left({}^{X}/_{R}, \mathscr{O}_{X/R}\right) \to (f[X], \mathscr{O}')$ offen ist, so heißt $f$ *identifizierende Abbildung*.

Man überlegt sich: Wenn $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}')$ stetig und surjektiv ist und $\bar{f}\colon (X/R, \mathscr{O}_{X/R}) \to (Y, \mathscr{O}')$ offen ist, so ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus. Wenn $f$ stetig ist und $\bar{f}$ offen ist, so ist $\bar{f}$ eine Einbettung.

## 2.5 Der Summenraum

**Definition 2.30.** Es sei $I$ eine Indexmenge und seien $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Die $(X_i)_{i\in I}$ seien paarweise disjunkt, d.h. $i \neq j \to X_i \cap X_j = \emptyset$ (falls die $(X_i)_{i\in I}$ nicht disjunkt sind, so kann man sie durch $X_i' := X_i \times \{i\}$ künstlich disjunkt machen und dann mit der Produkttopologie mit der Einermengentopologie versehen).

Die *topologische Summe von* $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ ist definiert als

$$\sum_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i) := \left( \bigcup_{i\in I} X_i, \left\{ Z \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I \; Z \cap X_i \in \mathscr{O}_i \right\} \right).$$

## 2.6 Anheften oder Zusammenkleben von Räumen

Nun stellen wir eine spezielle Familie von finalen Topologien her. Die Relation $R$ wird hier von $f$ zusammen mit der Identität auf der topologischen Summe von $(X, \mathcal{O}_X)$, $Y, \mathcal{O}_Y)$ erzeugt. Diese beiden zusammen spielen die Rolle von $f$ im vorigen Abschnitt.

**Definition 2.31.** Es seien $X, Y$ disjunkt und seien $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ topologische Räume. Es sei $A \subseteq X$ und $f\colon A \to Y$ stetig bezüglich der Spurtopologie auf $A$. Auf $X \cup Y$ definieren wir die durch $f$ erzeugte Äquivalenzrelation $R$ durch

$$z_1 R z_2 :\Longleftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 \in A \wedge f(z_1) = f(z_2) & \text{oder} \\ z_1 \in A \wedge f(z_1) = z_2 & \text{oder} \\ z_2 \in A \wedge f(z_2) = z_1 & \text{oder} \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Man kann nachrechnen, dass $R$ eine Äquivalenzrelation ist. Im Einzelnen sind die Klassen: Falls $z \in A$, so ist $[z]_R = f^{-1}[\{f(z)\}] \cup \{f(z)\}$. Falls $z \in f[A]$, so ist $[z]_R = \{z\} \cup f^{-1}[\{z\}]$. Falls $z \in X \cup Y \setminus (A \cup f[A])$, so ist $[z]_r = \{z\}$. Der Raum ${}^{((X,\mathscr{O}_X)+(Y,\mathscr{O}_Y))}/_R =: Y \cup_f X$ heißt die *Adjunktion/Anheftung/ Zusammenklebung von $X$ an $Y$ mithilfe von $f$.*

*Beispiel* 2.32. Spezialfall: $Y = \{1\}$, d.h. $xRx' \Leftrightarrow x = x' \vee x, x' \in A$. Dann heißt $Y \cup_f X$ *Zusammenschlagen von $A$* und wird auch ${}^{X}/_{A}$ geschrieben.

*Bemerkung* 2.33. Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen (siehe z.B. Satz 19.3 Greenburg Algebraische Topologie, Es seite 83f) gilt:

1. $\iota\colon Y \to Y \cup_f X$ stetig, offen und eine Einbettung, wobei $\iota$ die Inklusionsabbildung ist.

2. $\mathrm{id}\colon X \setminus A \to Y \cup_f X$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

*Beispiel* 2.34. Das Möbiusband: Es sei $X = [0,1] \times [0,1]$, $[0,1]$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$ versehen. $Y = [0,1]$, ebenfalls mit dieser Topologie. $A = \{(x,z) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$. Die Funktion $f\colon A \to Y$ mit $f(0,y) = 1-y$, $f(1,y) = y$ verklebt die Ränder $\{(x,z) \in X : x = 0\}$ und $\{(x,z) \in X : x = 1\}$ verdreht.

# Kapitel 3

# Zusammenhängende und wegzusammenhängende Räume

**Definition 3.1.** Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine nicht-leeren, disjunkten, offenen Mengen $U_1, U_2$ gibt, sodass $U_1 \cup U_2 = X$.

**Lemma 3.2.** *$(X, \mathscr{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und $X$ die einzigen Teilmengen von $X$ sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

*Beweis:* Es sei $(X, \mathscr{O})$ nicht zusammenhängend und seien $U_1, U_2$ nicht-leere, disjunkte und offene Mengen, sodass $U_1 \cup U_2 = X$. Dann ist $X \neq U_1 \neq \emptyset$ und $U_1 = X \setminus U_2$ ist offen und abgeschlossen zugleich.
Es sei umgekehrt $U_1$ offen und abgeschlossen, so dass $X \neq U_1 \neq \emptyset$. Dann ist $\{U_1, X \setminus U_1\}$ eine offene Partition von $X$. □

*Bemerkung* 3.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige Funktion $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}))$ gibt, die surjektiv ist.

**Proposition 3.4.** *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $a < b$. Das offene Intervall $(a, b)$ ist zusammenhängend (in der Spurtopologie bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$).*

*Beweis:* Angenommen, $(a, b)$ sei nicht zusammenhängend. Es seien $O_1, O_2$ nicht-leer, offen und disjunkt, sodass $O_1 \cup O_2 = (a, b)$. O.B.d.A. gibt es $x_1 \in O_1$ und $x_2 \in O_2$, so dass $x_1 < x_2$. Wir setzen

$$S := \{s \in (a, b) \mid [x_1, s] \subseteq O_1\}$$

Dann ist $S$ durch $x_2$ nach oben beschränkt. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, hat $S$ ein Supremum $m$. Wir zeigen, dass $m \notin O_1$ und $m \notin O_2$.

- Angenommen $m \in O_1$. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U_\varepsilon(m) \subseteq O_1$. Damit ist auch $m + \frac{\varepsilon}{2} \in S$.
- Angenommen $m \in O_2$. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U_\varepsilon(m) \subseteq O_2$. Damit ist aber $m - \frac{\varepsilon}{2} \notin S$.

Da beide Fälle zum Widerspruch führen, ist $(a, b)$ zusammenhängend. □

**Definition 3.5.** Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. $A$ heißt zusammenhängend (in $(X, \mathcal{O})$), wenn $(A, \mathcal{O}_A)$ zusammenhängend ist.

**Satz 3.6** (Über die Vererbung des Zusammenhangs auf den Abschluss)**.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Dann gilt:*

1. $\forall B \ \big(A \subseteq B \subseteq \bar{A} \to B$ *ist zusammenhängend*$\big)$
2. $\forall B \ \Big(A \cap \mathring{B} \neq \emptyset \wedge A \cap (X \smallsetminus B)^\circ \neq \emptyset \to A \cap \partial B \neq \emptyset\Big)$

*Beweis:*

1. Es sei $B$, sodass $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ und $B$ nicht zusammenhängend, d.h. $B \subseteq U_1 \sqcup U_2$, sodass $U_1 \cap B \neq \emptyset$, $U_2 \cap B \neq \emptyset$, $U_1$, $U_2$ offen. Dann ist $U_1 \sqcup U_2 \supseteq B \supseteq A$. Da $U_i$ offen ist und $U_i \cap \bar{A} \neq \emptyset$, ist $U_i \cap A \neq \emptyset$ (sonst wäre $\bar{A} \smallsetminus U_i$ eine kleinere abgeschlossene Menge, die $A$ enthält). Also ist $U_1, U_2$ eine offene Zerlegung von $A$.
2. Falls $A \cap \partial B = \emptyset$, ist $\left\{\mathring{B}, (X \smallsetminus B)^\circ\right\}$ eine offene Partition von $A$. Es gilt nämlich stets $X = \mathring{B} \sqcup (X \smallsetminus B)^\circ \sqcup \partial B$ und nach Voraussetzung ist $A \cap \partial B = \emptyset$.

□

**Satz 3.7.** *Es seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \mathscr{O}')$ topologische Räume, $X$ sei zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ sei stetig. Dann ist auch $f[X]$ zusammenhängend.*

*Beweis:* Es sei $f[X]$ nicht-zusammenhängend und sei $\{V_1, V_2\}$ eine offene Partition von $f[X]$. Dann ist $\{f^{-1}[V_1], f^{-1}[V_2]\}$ eine offene Partition von $X$ (da $f$ stetig ist). □

*Bemerkung* 3.8. Der Zwischenwertsatz ist ein Spezialfall dieses Satzes, wenn man bedenkt, dass die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Intervalle sind.

**Lemma 3.9.** *Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U}$ von $X$ (d.h. $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{O}$ und $\bigcup \mathscr{U} = X$) und für alle $a, b \in X$ eine endliche Teilmenge $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$U_i \in \mathscr{U}$,*
2. *$a \in U_1 \smallsetminus U_j$ für alle $j > 1$,*
3. *$b \in U_n \smallsetminus U_j$ für alle $j < n$.*
4. *$U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$.*

*Beweis:* Es sei $\{U_1, U_2\}$ eine offene Partition von $X$ und wähle $a \in U_1$ und $b \in U_2$. Dann ist $\mathscr{U} := \{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung ohne die gewünschte Eigenschaft.
Für die umgekehrte Richtung definieren wir, gegeben die offene Überdeckung $\mathscr{U} = \mathscr{O}$ von $X$, eine Äquivalenzrelation auf $X$: Für $x, y \in X$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn es $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ gibt, sodass

1. $U_i \in \mathscr{U}$,
2. $x \in U_1 \smallsetminus U_j$ für alle $j > 1$ und $y \in U_n \smallsetminus U_j$ für alle $j < n$.
3. $U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$.

In diesem Falle sagen wir, dass $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ eine Kette von $x$ nach $y$ ist. Dass $\sim$ reflexiv und symmetrisch ist, ist klar. Zur Transitivität: Es sei $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ eine Kette von $x$ nach $y$ und $\langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ eine Kette von $y$ nach $z$.
Es sei $k := \min \{i \leq n \mid \exists j \in \{1, \ldots, m\} \ (U_i \cap V_j) \neq \emptyset\}$ ($k$ ist wohldefiniert, da $y \in U_n \cap V_1$) und $l := \max \{j \leq m \mid U_k \cap V_j \neq \emptyset\}$. Es folgt, dass die Menge $\langle U_1, \ldots, U_k, V_l, \ldots, V_m \rangle$ eine Kette von $x$ nach $z$ ist.
Jede Äquivalenzklasse ist offen: Es sei $x \sim y$. Wir zeigen, dass es eine offene Umgebung von $y$ gibt, die ganz in $[x]_\sim$ liegt. Es sei $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ eine Kette von $x$ nach $y$. Wenn $z \in U_n$, definieren wir $k := \min\{i \leq n \mid z \in U_i\}$. Dann ist $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ eine Kette von $x$ nach $z$. Also ist $U_n \subseteq [x]_\sim$. Insgesamt ist $[x]_\sim^\circ = [x]_\sim$ und die Menge ist somit offen.

Da Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind, ist auch jede Äquivalenzklasse abgeschlossen. Weil $X$ zusammenhängend ist, sind $X$ und $\emptyset$ die einzigen Mengen, die offen und abgeschlossen sind. Also gibt es nur eine einzige Äquivalenzklasse. Dies entspricht der Aussage des Lemmas. $\square$

Wir halten fest, dass der Zusammenhang von $X$ schon daraus folgt, dass die Aussage für die bestimmte Überdeckung $\mathscr{U} := \mathscr{O}$ gilt.

**Satz 3.10.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $A$, $B$ zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.*

*Beweis:* Wir nehmen auf $A \cup B$ die Relation $x \sim y$, die Kettenverbindung bezüglich der offenen Überdeckung $\mathscr{U} = \mathscr{O}$. Es sei $b \in A \cap B$, $x \in A$ und $y \in B$. Dann ist $x \sim b$, da $A$ zusammenhängend ist, und $y \sim b$, da $B$ zusammenhängend ist. Damit ist auch $x \sim y$. $\square$

*Bemerkung* 3.11. Das vorherige Lemma lässt sich auf folgende Weise verallgemeinern: Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $I$ eine Indexmenge und seien $X_i \subseteq X$ zusammenhängende Teilmengen von $X$. Weiterhin sei $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ für beliebige $i, j \in I$. Dann ist $\bigcup_{i \in I}$ zusammenhängend.

**Satz 3.12.** *Es sei $I$ eine Indexmenge und seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für alle $i \in I$. Der Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle $(X_i, \mathscr{O}_i)$ zusammenhängend sind.*

*Beweis:* Es sei $\prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend. Dann ist für jedes $i \in I$ der Raum $X_i$ zusammenhängend, weil die Projektion $p_i$ stetig ist (nach Lemma 3.7).
Es sei umgekehrt $a \in \prod_{i \in I} X_i$ und

$$B = \left\{ b \in \prod_{i \in I} X_i \mid \exists Y \subseteq \prod_{i \in I} X_i \text{ zusammenhängend, so dass } a, b \in Y \right\}.$$

$B$ ist zusammenhängend nach der vorherigen Bemerkung (denn $B$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von $\prod_{i \in I} X_i$, die $a$ enthalten).

Wir zeigen nun, dass für alle offenen Mengen $O$ gilt, dass $O \cap B \neq \emptyset$. Es reicht, Elemente aus der Basis aus Definition 2.11 zu betrachten. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $O$ die Gestalt $O = \prod_{i \in I_0} U_i \times \prod_{i \in I \setminus I_0} X_i$ hat für offene Mengen $U_i \in \mathscr{O}_i$ und $I_0 = \{1, \ldots, n\}$. Es sei $b_i \in U_i$

für $i \in I_0$, dann ist $b := (b_1, \ldots, b_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \in O$. Setze nun für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$Z_j := \{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_{j-1}\} \times X_j \times \{a_{j+1}\} \times \ldots \times \{a_n\} \times \prod_{i \in I \setminus I_0} \{a_i\}.$$

Dann ist $Z_j$ zusammenhängend, da $X_j$ zusammenhängend ist. Außerdem gilt $(b_1, \ldots, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)^\frown \langle a_i : i \in I \setminus I_0 \rangle \in Z_j \cap Z_{j+1} \neq \emptyset$ und damit ist nach Satz 3.10 auch

$$Z := \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$$

zusammenhängend. Nach Definition der $Z_j$ ist $a \in Z_1$ und $b \in Z_n$. Damit folgt $Z \cap O \neq \emptyset$ und da $Z$ zusammenhängend ist auch $Z \subseteq B$. Somit haben wir gezeigt, dass $O \cap B \neq \emptyset$.
Daraus folgt, dass $\bar{B} = \prod_{i \in I} X_i$. Damit gilt $B \subseteq \prod_{i \in I} X_i \subseteq \bar{B}$ und mit Satz 3.6 folgt, dass $\prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend ist. □

**Definition 3.13.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $\mathscr{K}(x)$ die *Zusammenhangskomponente von* $x$, wobei

$$\mathscr{K}(x) := \bigcup \{Y \subseteq X \mid x \in Y \text{ und } Y \text{ zusammenhängend}\}.$$

**Definition 3.14.** Falls $\forall x \in X \;\; \mathscr{K}(x) = \{x\}$, dann heißt $(X, \mathscr{O})$ *total unzusammenhängend*.

**Definition 3.15.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.

1. Es sei $I = [0, 1]_{\mathbb{R}}$ mit der Standardtopologie. Eine Abbildung $\gamma \colon I \to X$ heißt *Weg von $x$ nach $y$*, wenn $\gamma$ stetig ist und $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

2. $(X, \mathscr{O})$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in X$ ein Weg von $x$ nach $y$ existiert.

3. $(X, \mathscr{O})$ heißt *lokal zusammenhängend (lokal wegzusammenhängend)*, wenn

$$\forall x \in X \, \forall U \in \mathscr{U}(x) \, \exists V \in \mathscr{U}(x) \, \big(V \subseteq U \wedge V \text{ zusammenhängend (wegzusammenhängend)}\big).$$

**Definition 3.16.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $\mathscr{K}_w(x)$ die *Wegzusammenhangskomponente von $x$ in $(X, \mathscr{O})$* mit

$$\mathscr{K}_w(x) := \{y \in X \mid \exists \gamma\colon [0,1] \to X \ (\gamma(0) = x, \gamma(1) = y)\}.$$

**Satz 3.17.**

1. *Jeder (lokal) wegzusammenhängende Raum ist (lokal) zusammenhängend.*
2. *Wenn $X$ lokal wegzusammenhängend ist, ist $\mathscr{K}_w(x)$ offen für alle $x$. Wenn $X$ lokal zusammenhängend ist, ist $\mathscr{K}(x)$ offen für alle $x$.*
3. *Wenn $X$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist $X$ wegzusammenhängend.*
4. *$\prod_{j \in J} X_j$ ist lokal zusammenhängend genau dann, wenn jedes $X_i$ lokal zusammenhängend ist und für alle bis auf endlich viele $j \in J$ gilt, dass $X_j$ zusammenhängend ist.*

*Beweis:*

1. Es sei $X$ nicht zusammenhängend und $X = U \cup V$ mit $U, V$ disjunkt, nicht-leer und offen. Es sei $x \in U, y \in V$. Falls $\gamma\colon [0,1] \to X$ stetig ist mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, so ist $I = \gamma^{-1}[U] \cup \gamma^{-1}[V]$. Weiterhin sind $\gamma^{-1}[U], \gamma^{-1}[V]$ nicht-leer und offen (da $\gamma$ stetig ist) und disjunkt (da $U$ und $V$ disjunkt sind). Damit wäre $I$ nicht zusammenhängend, ein Widerspruch.

2. Es sei $X$ lokal wegzusammenhängend. Damit gilt $\forall x\, \exists V_x \in \mathscr{U}(x)$, sodass $V_x$ wegzusammenhängend. Dann gilt

$$\mathscr{K}_w(x) = \bigcup \{V_y \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

   Für die zweite Aussage: Es sei $x \in X$, $y \in \mathscr{K}(x)$. Da $X$ lokal zusammenhängend ist, gibt es $V_y \in \mathscr{U}(y)$, sodass $V_y$ zusammenhängend ist. Damit gilt $V_y \cap \mathscr{K} \neq \emptyset$, also ist $V_y \cup \mathscr{K}$ zusammenhängend und $V_y \cup \mathscr{K} \ni x$. Also ist $V_y \subseteq \mathscr{K}(x)$.

3. Aus 2 folgt, dass $\mathscr{K}_w(x)$ offen ist für alle $x$. Es sei $\{K_j \mid j \in J\}$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X$, wobei $K_i \neq K_j$ für $i \neq j$. Dann ist

$$K_1 \cup \bigcup \{K_j \mid j \in J \setminus \{1\}\} = X.$$

Weil $X$ zusammenhängend ist, muss $\bigcup \{K_j \mid x \in J \setminus \{1\}\}$ leer sein (offen und disjunkt sind die Mengen). Damit gibt es nur eine Wegzusammenhangskomponente, d.h. $X$ ist wegzusammenhängend.

4. Übung.

□

*Bemerkung* 3.18. 1. Es gibt wegzusammenhängende Räume, die nicht lokal wegzusammenhängend sind: Es sei $X := \{(x, \sin(x^{-1})) \mid x \in (0,1)\}$. Wir bilden den Abschluss im $\mathbb{R}^2$.

$$\bar{X} = \left\{ \left(x, \sin(x^{-1})\right) \mid x \in (0,1) \right\} \cup \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}.$$

$\bar{X}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend: Es sei $x_2 := (0,1)$ und $x_1 := (0.5, \sin(2))$. Dann ist $\mathscr{K}_w(x_1) \cap \mathscr{K}_w(x_2) = \emptyset$.

2. Es gibt wegzusammenhängende Räume, die nicht lokal zusammenhängend sind: Es sei

$$X := \{(0,y) \mid y \in [0,1]\} \cup \{(x, 1-(n+1)\cdot x) : x \in [0, \frac{1}{n+1}], n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge $X$ wird mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}^2$ ausgestattet. Für $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ gibt es keine zusammenhängende Umgebung.

*Frage* 3.19. Anregung zum Basteln eines Weges: Es sei $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ der reelle Raum mit der Standardtopologie. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(\mathbb{R}_n, \mathscr{O}_n)$ homöomorph zu $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$. Ist $\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}_n, \mathscr{O}_n)$ lokal wegzusammenhängend? Wie wäre es für überabzählbar viele Faktoren?

# Kapitel 4

# Filter und Konvergenz

**Definition 4.1.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ *konvergiert gegen* $x$, wir schreiben $x_n \to x$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0\ (x_n \in U)\,.$$

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt einer Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\, \forall n_0\, \exists n \geq n_0\ (x_n \in U)\,.$$

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Berührungspunkt einer Teilmenge* $A \subseteq X$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\ (U \cap A \neq \emptyset)\,.$$

*Beispiel* 4.2. Es sei $X := \omega_1 \cup \{\omega_1\}$ versehen mit der Ordnungstopologie. Dann ist der Punkt $\omega_1$ Berührpunkt von der Menge $\omega_1$, aber es gibt keine Folge in $\omega_1$, die gegen $\omega_1$ konvergiert.

*Beispiel* 4.3. Es sei $X := \mathbb{R}^{|\mathbb{R}|} = \prod_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_r$ mit der Produkttopologie bzgl. der Standardtopologie. Es sei $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sodass $\forall r \in \mathbb{R}\, f(r) = 0$. Eine Umgebungsbasis von $f$ ist gegeben durch

$$\mathscr{U}(f) = \left\{ \prod_{j\in J_0} O_i \times \prod_{j\in\mathbb{R}\setminus J_0} \mathbb{R} \mid J_0 \subseteq \mathbb{R}, J_0 \text{ endlich}, O_j \in \mathscr{U}(0)_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Es sei

$$f_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq r; \\ 1, & \text{falls } x = r. \end{cases}$$

Dann ist $f$ Berührungspunkt von $\{f_r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

**Satz 4.4.** *Es seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \mathscr{O}')$ topologische Räume mit abzählbarer Umgebungsbasis, und sei $x \in X$.*

1. *Es sei $A \subseteq X$. Dann ist $x \in \bar{A} \leftrightarrow \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $x_n \to x$, wobei für die Vorwärtsrichtung das Auswahlaxiom benutzt wird.*

2. *$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x$ genau dann, wenn*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x))\,.$$

   *Hier wird für die Rückwärtsrichtung das Auswahlaxiom benutzt.*

Dieser Satz wurde in der Analysis I bewiesen.

**Definition 4.5.** Eine Teilmenge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Filter über $X$*, wenn

1. $X \in \mathscr{F}$, bzw. $\mathscr{F} \neq \emptyset$. $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

2. $A \in \mathscr{F} \wedge A \subseteq B \to B \in \mathscr{F}$.

3. $A, B \in \mathscr{F} \to A \cap B \in \mathscr{F}$.

*Beispiel* 4.6. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathscr{U}(x)$ ein Filter über $X$ (der sogenannte *Umgebungsfilter*).

**Definition 4.7.** Es sei $\mathscr{F}$ ein Filter über $X$. Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ heißt *Filterbasis von $\mathscr{F}$*, wenn

$$\forall F \in \mathscr{F}\ \exists B \in \mathscr{B}\ (B \subseteq F)\,.$$

*Bemerkung* 4.8. (1) $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist Basis eines Filters auf $X$ genau dann, wenn

$$\emptyset \notin \mathscr{B} \wedge \forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}\ \exists B_3 \in \mathscr{B}\ (B_1 \cap B_2 \supseteq B_3)\,.$$

(2) Falls $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ nicht gegen endliche Schnitte abgeschlossen ist, aber jeder endliche Schnitt aus $\mathscr{S}$ nicht leer ist, so ist der von $\mathscr{S}$ auf $X$ erzeugte Filter

$$\mathscr{F} := \left\{ U \subseteq X \mid \exists B_0, \ldots, B_n \in \mathscr{S}\ \left( U \supseteq \bigcap_{i=0}^{n} B_i \right) \right\}.$$

Die Menge der endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathscr{S}$ ist eine Basis von $\mathscr{F}$. $\mathscr{S}$ kann man eine Subbasis nennen.

(3) Der von $\emptyset$ erzeugte Filter ist $\mathscr{F} = \{X\}$.

**Definition 4.9.** Ein Filter $\mathscr{F}$ heißt *frei*, wenn $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$. Falls $\mathscr{F}$ nicht frei ist, so heißt $\mathscr{F}$ *fixiert*.

*Beispiel* 4.10. Der *Fréchet-Filter* über $\mathbb{N}$ ist $\mathscr{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \smallsetminus A \text{ ist endlich}\}$. Er ist frei.

**Definition 4.11.** $\mathscr{U}$ heißt *Ultrafilter*, wenn $\mathscr{U}$ ein $\subseteq$-maximaler Filter ist, d.h.

$$\forall A \subseteq X \ (A \in \mathscr{U} \vee X \smallsetminus A \in \mathscr{U}).$$

**Satz 4.12.** *Jeder Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.*

**Definition 4.13.** Es sei $H$ eine Menge und $\leq_H$ eine Halbordnung auf $H$ (d.h., $\leq_H$ ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch). $(H, \leq_H)$ heißt *induktiv*, wenn jede Menge $K \subseteq H$, die durch $\leq_H$ total geordnet wird (d.h. für $x, y \in K$ gilt $x \leq_H y$, $y \leq_H x$ oder $x = y$), eine obere Schranke besitzt.

**Satz 4.14.** *Das Lemma von Zorn. Jede induktive Halbordnung hat ein maximales Element.*

*Beweis:* Es sei $(H, \leq_H)$ eine induktive Halbordnung. Wir setzen $y <_H x$ genau dann, wenn $y \leq_H x$ und $y \neq x$.

Es sei $h\colon \mathscr{P}(H) \smallsetminus \{\emptyset\} \to H$ eine Auswahlfunktion, d.h. $\forall X \subseteq H$, $X \neq \emptyset$ ist $h(X) \in X$. Es sei $K$ eine Kette in $(H, <_H)$ und sei $x \in K$. Dann sei $K_{<x} = \{y \in K \mid y <_H x\}$. Wir definieren: Eine Kette $K \subseteq H$ heißt $h$-Kette, falls $(K, <_H)$ wohlgeordnet ist und für alle $x \in K$ gilt

(1) $K_{<x}$ hat eine obere Schranke.

(2) $x = h(\{m \in H \mid m \text{ obere Schranke von } K_{<x}\}$

Wir zeigen folgende Zwischenbehauptung: Für je zwei $h$-Ketten $K$, $L$ gilt:

$$K = L \vee (\exists x \in L)(K = L_{<x}) \vee (\exists x \in K)(L = K_{<x}).$$

Dies zeigt man durch transfinite Induktion über die längere der beiden Wohlordnungen $K$, $L$. Wir nehmen o.B.d.A $K \smallsetminus L \neq \emptyset$ and und nehmen das $<_H$ kleinste Element $x \in K \smallsetminus L$. (Hier geht also die Wohlordnungseigenschaft ein.) Dann gilt für $K_{<x}$ und $L$ die Induktionsvoraussetzung, also $K_{<x} = L$ oder $K_{<x} = L_{<z}$ für ein $z \in L$ oder $(K_{<x})_{<y} = L$ für ein $y \in K_{<x}$. Nach

Wahl von $x$ sind die letzten beiden Fälle ausgeschlossen. Im mittleren Fall folgt dies aus Eigenschaft (2) der $h$-Ketten. Daher ist $K_{<x} = L$, und die Behauptung gezeigt.

Aus der Zwischenbehauptung folgt: Die Vereinigung $U$ aller $h$-Ketten ist selbst eine $h$-Kette. Dieses $U$ hat eine obere Schranke $m$, da $H$ induktiv ist. Dann ist $m \in U$ und $m$ maximal in $H$, da andernfalls $U$ zu einer echt längeren $h$-Kette verlängert werden könnte. □

*Beweis von Satz 4.12:* Es sei $F$ ein Filter (eine Filterbasis ist schon ausreichend) und

$$H = \{G \subseteq \mathscr{P}(X) \mid G \supseteq F,\ G \text{ Filter}\}\,.$$

$(H, \subseteq)$ ist eine induktive Halbordnung, denn wenn $(K, \subseteq)$ total geordnet ist, so ist $\bigcup K$ eine obere Schranke von $K$. Nach dem Lemma von Zorn (Satz 4.14) hat $H$ ein maximales Element. Dies ist dann ein Ultrafilter, der $F$ als Teilmenge enthält. □

**Definition 4.15.**

(1) Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ ein Filter auf $X$. $\mathscr{F}$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathscr{F}$. Wir schreiben $\mathscr{F} \to x$.

Beachten Sie, dass $x$ nicht eindeutig zu sein braucht. Für die Eindeutigkeit nutzt

$$\forall x, \forall y, (x \neq y \to \exists U \in \mathscr{U}(x), y \notin U).$$

(2) $x \in X$ ist *Berührungspunkt von* $\mathscr{F}$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\, \forall F \in \mathscr{F}\ \ (U \cap F \neq \emptyset)\,.$$

**Definition 4.16.** Es seien $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ Filter. Falls $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$, so heißt $\mathscr{F}_1$ gröber als $\mathscr{F}_2$ und $\mathscr{F}_2$ heißt feiner als $\mathscr{F}_1$.

*Bemerkung* 4.17. $x$ ist Berührpunkt von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn es ein $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ gibt, sodass $\mathcal{G} \to x$.

*Beweis:* Es sei $\mathcal{G}$ der von $\{U \cap F \mid U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter. Weil $x$ Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist, ist $\emptyset \notin G$. Die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Schnitte folgt aus

$$(U_1 \cap F_1) \cap (U_2 \cap F_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (F_1 \cap F_2),$$

weil $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{F}$ Filter sind. Weil $F = X \cap F$, ist $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{G} \to x$.
Es sei $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, sodass $\mathcal{G} \to x$. Für $U \in \mathcal{U}(x)$ und $F \in \mathcal{F}$ gilt dann, weil $F \in \mathcal{G}$, dass $F \cap U \in \mathcal{G}$ und, da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, $F \cap U \neq \emptyset$. □

**Satz 4.18.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Dann gilt*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \mathcal{F}(\mathcal{F} \text{ Filter auf } X \wedge A \in \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \to x)$$

*Beweis:* Es sei $x \in \overline{A}$. Weil jede Umgebung von $x$ $A$ schneidet, ist

$$\mathcal{F} = \text{Filter}(\{U \cap A | U \in \mathcal{U}(x)\})$$

ein Filter und $x$ ist Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Also existiert ein $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, das gegen $x$ konvergiert. $A \in \mathcal{G}$ gilt immer noch.
Es sei $\mathcal{F}$ wie auf der rechten Seite. Weil $A \in F$ und $U \in \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, ist $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, also ist $x \in \overline{A}$. □

**Satz 4.19.** *Es sei $f_*(\mathcal{F})$ der von $\{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter. Es seien $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathcal{O}_\mathcal{Y})$, $x \in X$, $f \colon X \to Y$. Dann gilt*

$$f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow \forall \mathcal{F}\,((\mathcal{F} \to x) \to (f(\mathcal{F}) \to f(x))))$$

*Beweis:* Übungsaufgabe. □

# Kapitel 5

# Trennungseigenschaften

**Definition 5.1.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum

T0 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T0-Raum*, wenn

$$\forall x \neq y \in X \mathscr{U}(y) \neq \mathscr{U}(x)$$

T1 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T1-Raum*, wenn

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x \in \mathcal{U}(x), U_y \in \mathcal{U}(y)(x \notin U_y \wedge y \notin U_x)$$

T2 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T2-Raum* (oder *Hausdorffraum*), wenn

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x \in \mathcal{U}(x), U_y \in \mathcal{U}(y)(U_x \cap U_y = \emptyset)$$

T3 Wir schreiben für eine Teilmenge $A \subseteq X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathscr{O})$,

$$\mathcal{U}(A) = \{C : \exists B, (B \supseteq A, B \in \mathscr{O}, B \subseteq C)\}.$$

$(X, \mathscr{O})$ heißt *T3-Raum*, wenn

$$\forall A \in \mathcal{A} \forall x \notin A, \exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}(x), \exists U_A \in \mathcal{U}(A), (U_x \cap U_A = \emptyset)$$

wobei $\mathcal{A}$ das System der abgeschlossenen Mengen bezeichnet.

T3a $(X, \mathscr{O})$ heißt *T3a-Raum*, wenn

$$\forall A \in \mathcal{A} \forall x \notin A, \exists f \colon X \to [0,1]_{\mathbb{R}} \text{ stetig } f(x) = 1, f[A] = \{0\}.$$

T3a-Räume werden auch $T3\frac{1}{2}$-Räume genannt.

T4 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T4-Raum*, wenn

$$\forall A, B \in \mathcal{A}(A \cap B = \emptyset \to \exists U_A \in \mathcal{U}(A), \exists U_B \in \mathcal{U}(B), U_A \cap U_B = \emptyset)$$

- $(X, \mathscr{O})$ heißt *regulär*, wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T1- und T3-Raum ist.
- $(X, \mathscr{O})$ heißt *vollständig regulär*, wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T1- und T3a-Raum ist.
- $(X, \mathscr{O})$ heißt *normal*, wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T1- und T4-Raum ist.

*Bemerkung* 5.2. Es gelten folgende Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
\text{Normal} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Vollständig regulär} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Regulär} \arrow[r] \arrow[d] & T2 \arrow[r] & T1 \arrow[r] & T0 \\
T4 & T3a \arrow[r] & T3 & & &
\end{tikzcd}$$

Die Implikationen:

1. Normal impliziert vollständig regulär: Das wird im Lemma von Urysohn bewiesen.
2. Regulär impliziert T2: Unter T1 sind alle Einermengen abgeschlossen. Nach T3 besitzen $\{x\}$ und $\{y\}$ disjunkte Umgebungen.

Die Nichtimplikationen:

1. T3 alleine ist schwach: Es sei $|X| \geq 2$ mit der Topologie $\{\emptyset, X\}$. $X$ hat T3, aber nicht T0.
2. T0 impliziert nicht T1: Es sei $\mathbb{N}$ mit der Topologie ausgestattet, dass Endabschnitte (also Intervalle $[n, \infty)$) und $\emptyset$ offen sind. Dann hat $m > n$ eine Umgebung, die $n$ nicht enthält, aber alle Umgebungen von $n$ erhalten $m$.
3. T1 impliziert nicht T2: Es sei $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie ausgestattet. $\mathbb{N} \setminus \{x\}$ und $\mathbb{N} \setminus \{y\}$ bezeugen T1 für die Punkte $x, y$, aber zwei kofinite Mengen schneiden sich.

4. T4 impliziert nicht T3, und T4 impliziert nicht T0: Es sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\mathscr{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}.$$

Dann ist $\mathcal{A} = \{X, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5\}, \emptyset\}$ und es gibt keine abgeschlossenen, nichtleeren, disjunkten Mengen, also ist T4 trivialerweise erfüllt. Aber die abgeschlossene Menge $\{4, 5\}$ und der Punkt 3 haben keine disjunkten Umgebungen. Der Punkt 4 hat keine (offene) Umgebung, die die 3 nicht enthält. Die Punkte $4 \neq 5$ zeigen, dass T0 nicht gilt.

**Satz 5.3.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $(X, \mathscr{O})$ *ist ein* $T1$*-Raum.*
2. *Jede Einpunktmenge ist abgeschlossen.*
3. *Für alle* $A \subseteq X$ *ist* $A = \bigcap\{U | U \supseteq A, U \in \mathscr{O}\}$

*Beweis:*

1⇒2 Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T1-Raum. Es sei $y \neq x$. Nach T1 kann $x$ von $y$ getrennt werden. Für jedes $y \neq x$ können wir also ein $U_y \in \mathcal{U}(y)$ wählen, so dass $x \notin U_y$. Dann ist

$$\{x\} = \bigcap\{X \smallsetminus U_y | y \in X \setminus \{x\}\}$$

und damit abgeschlossen.

2⇒3 Es sei $A \subseteq X$. Es gilt natürlich $A \subseteq \bigcap\{U | U \supseteq A, U \in \mathscr{O}\}$. Falls $x \notin A$, ist $U := X \smallsetminus \{x\}$ offen und Obermenge von $A$, sodass $x \notin U$.

3⇒1 Es seien $x \neq y \in X$. Wir wenden das dritte auf $A := \{x\}$ an und erhalten eine Umgebung von $x$, die $y$ nicht enthält.

□

**Satz 5.4.** *Äquivalent sind:*

1. $(X, \mathscr{O})$ *ist ein Hausdorff-Raum.*
2. $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X$ *ist abgeschlossen in der Produkttopologie.*

3. *Für $x \in X$ gilt $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}(x)\}$.*

4. *Jeder konvergente Filter hat genau einen Häufungspunkt.*

*Beweis:* 1⇒2 Es sei $(x, y) \notin \Delta$, also ist $x \neq y$. Damit gibt es zwei disjunkte, offene Umgebungen $U_x, U_y$, sodass $x \in U_x, y \in U_y$. Dank Disjunktheit von $U_x$ und $U_y$ ist $\Delta \cap U_x \times U_y = \emptyset$. Also ist $\Delta = \overline{\Delta}$ und $\Delta$ ist abgeschlossen.

2⇒3 $\{x\} \subseteq \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}(x)\}$ ist klar. Es sei $y \notin \{x\}$, d.h. $y \neq x$. Dann ist $(x, y) \notin \Delta$, also gibt es $U_x \times U_y$ offen, sodass $(x, y) \in U_x \times U_y$ und $U_x \times U_y \cap \Delta = \emptyset$ (also sind $U_x$ und $U_y$ disjunkt). Dann ist $U_x \subseteq X \smallsetminus U_y$, also ist $\overline{U_x} \subseteq X \smallsetminus U_y$, also ist $y \notin \overline{U_x}$ und $y \notin \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}(x)\}$

3⇒4 Es sei $\mathcal{F}$ konvergent und $x$, sodass $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Dann ist

$$\bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}\} = \{x\}$$

Es sei nun $y \neq x$. Weil $y \notin \bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$, gibt es ein $F \in \mathcal{F}$, sodass $y \notin \overline{F}$ und damit gibt es eine Umgebung $U$ von $y$, sodass $U \cap F = \emptyset$. Also ist $y$ nicht Häufungspunkt von $\mathcal{F}$.

4⇒1 Es sei $x \neq y$. $\mathscr{U}(x)$ konvergiert gegen $x$, also ist $y$ nicht Häufungspunkt von $\mathscr{U}(x)$. Daher gibt es Umgebungen $U_x, U_y$ von $x$ und $y$, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$. Damit ist $(X, \mathscr{O})$ ein Hausdorff-Raum.

□

*Bemerkung* 5.5. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein vollständig regulärer Raum. Dann hat $\mathscr{O}$ eine Subbasis der Form

$$\{f^{-1}[U] \mid f\colon (X, \mathscr{O}) \to ([0,1], \mathscr{O}_<), f \text{ stetig}, U \subseteq [0,1] \text{ offen}\}.$$

**Satz 5.6.** *Jeder vollständig reguläre Raum kann in ein Produkt*

$$\prod_{f \in L} [0,1]_f$$

*eingebettet werden, für eine geeignete Menge $L$, d.h. es gibt*

$$e\colon (X, \mathscr{O}) \to ([0,1]^{|L|}, \mathscr{O}_\prod)$$

*sodass ein Homöomorphismus auf sein Bild ist (bezüglich der Spurtopologie).*

*Beweis:* Es sei

$$L = \{f | f \colon X \to [0,1] \text{ stetig}\}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} e \colon X &\to \prod_{f \in L} [0,1] \\ x &\longmapsto (f(x))_{f \in L} \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass $e$ alle geforderten Eigenschaften erfüllt:

- $e$ ist injektiv: Es sei $x \neq y$. Nach T1 ist $A = \{y\}$ abgeschlossen und $x \notin A$. Nach T3a gibt es ein $f$, sodass $f(x) = 1, f[A] \subseteq \{0\}$. Also ist $f(y) = 0$ und $e(x)$ und $e(y)$ unterscheiden sich an der Stelle $f$.
- $e$ ist stetig, da für alle $f$ $p_f \circ e = f$ stetig ist.
- $e$ ist bezüglich $\mathscr{O}$ und der Spur von $e[X]$ in $\left(\prod_{f \in L}[0,1], \mathscr{O}_\Pi\right)$ offen: Wir rechnen dies für die Subbasis-Urbilder (siehe Bemerkung 5.5) nach:

$$e\left[f^{-1}\left[\underbrace{B}_{\in \mathscr{O}_{\mathbb{R}}}\right]\right] = e\left[(p_f \circ e)^{-1}[B]\right] =$$
$$e[e^{-1}[\prod_{g \neq f, g \in L} [0,1] \times B] = (\prod_{g \neq f, g \in L} [0,1] \times B) \cap e[X].$$

□

**Satz 5.7.** *Jeder Unterraum eines T0,...,T3a-Raumes ist ein T0,...,T3a-Raum.*

Beweis: Geduldiges Nachrechnen. Bei T3a nutzt man auch die universelle Eigenschaft der Unterraumtopologie aus Satz 2.6.

*Bemerkung* 5.8. Der obige Satz gilt nicht für T4: Es sei $(X, \mathscr{O})$ der nicht normale Raum, also die Sorgenfrey-Ebene, aus Satz 5.11. Dieser Raum ist vollständig regulär und kann daher nach Satz 5.6 in ein Produkt $[0,1]^L$ eingebettet werden. Letzteres ist normal. Das Bild der Einbettung ist homömorph zur Sorgenfrey-Ebene. Das Bild der Einbettung ist also ein nicht normaler Unterraum.

Es gilt aber ein ähnlicher Satz für T4 unter stärkeren Voraussetzungen.

**Satz 5.9.** *Jeder abgeschlossene Unterraum eines T4-Raumes ist ein T4-Raum.*

**Satz 5.10.** *Es seien $X_i, i \in I$ nicht leere topologische Räume, $j = 0, 1, 2, 3, 3a$. $\prod_{i \in I} X_i$ ist ein Tj-Raum genau dann, wenn jedes $X_i$ ein Tj-Raum ist.*

*Beweis:* $\Rightarrow$: Es sei $\prod_{k \in I} X_k$ ein Tj-Raum. Es sei $i$ beliebig. Zu zeigen ist: $X_i$ ist ein Tj-Raum. Es sei $x = \langle x_k \rangle_{k \in I} \in \prod_{k \in I} X_k$ (nach $\mathsf{AC}$). Wir definieren

$$Y_k := \begin{cases} X_i & k = i \\ \{x_k\} & k \neq i \end{cases}$$

Nun ist

$$\prod_{k \in I} Y_k \cong X_i$$

durch den Homöomorphismus $\langle x_k \rangle_{k \in I} \longmapsto x_i$. Nach Satz 5.7 hat $\prod_{k \in I} Y_k$ die Tj-Eigenschaft und damit auch der homöomorphe Raum $X_i$ (es ist klar, dass homömorphe Räume dieselben topologischen Eigenschaften haben).

Der Beweis der Umkehrrichtung besteht aus geduldigem Nachrechnen unter Ausnutzung der Eigenschaften der Produkttopologie, und für T3a nutzt man auch Satz 2.17. □

**Satz 5.11.** *Die Sorgenfreygerade $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$, wobei $\mathscr{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ Basis von $\mathscr{O}$ ist, ist normal, da $\mathbb{R}$ vollständig ist, aber $(\mathbb{R}, \mathscr{O}) \times (\mathbb{R}, \mathscr{O})$ ist nicht normal.*

*Beweis:* Wir behaupten, dass $S = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ abgeschlossen und diskret ist. $S$ ist sogar in der Standardtopologie abgeschlossen, also erst recht in der Sorgenfreytopologie. Es sei $(x, -x) \in S$. Dann ist für $\varepsilon > 0$ $[x, x + \varepsilon) \times [-x, -x + \varepsilon) \cap S = \{(x, -x)\}$. Also ist $S$ diskret. Der Beweis folgt nun aus folgendem Lemma, da $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht ist und $2^{|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|} = 2^\omega = |\mathbb{R}| = |S|$. □

**Lemma 5.12.** *Es sei $(Y, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Es sei $S \subseteq Y$ abgeschlossen und diskret. Es sei $D$ eine dichte Teilmenge von $Y$ und sei $|S| \geq 2^{|D|}$. Dann ist $(Y, \mathscr{O})$ nicht normal.*

*Beweis:* Es sei $(Y, \mathscr{O})$ normal. Für alle $A \subseteq S$ gilt dann, dass $A$ abgeschlossen ist, da $S$ diskret ist. Auch $S \smallsetminus A$ ist abgeschlossen. Es sei $U_A \in \mathscr{U}(A)$ offen, $V_A \in \mathscr{U}(S \smallsetminus A)$ offen, sodass $U \cap V = \emptyset$. Die Funktion

$$A \longmapsto (U_A, V_A)$$

ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathcal{P}(S)$.

Wir behaupten, dass $i\colon A \mapsto U_A \cap D$, eine Funktion von $\mathcal{P}(S)$ nach $\mathcal{P}(D)$, injektiv ist. Es sei $A \neq B \subseteq S$, o.B.d.A. $A \setminus B \neq \emptyset$. Dann ist $U_A \cap V_B \supseteq A \cap (S \setminus B) \neq \emptyset$, aber $U_B \cap V_B = \emptyset$. Also ist $U_A \not\subseteq U_B$ und damit $U_A \neq U_B$. Weil $U_A$ und $U_B$ und $U_A \cap V_B \supseteq A \cap (S \setminus B) \neq \emptyset$ offen sind, ist $(U_A \cap V_B) \cap D \neq \emptyset$ und $V_B \cap U_B = \emptyset$. Also ist $U_A \cap D \neq U_B \cap D$.

Die Funktion $i$ bezeugt also $|\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)|$. Da weiterhin nach dem Satz von Cantor $|S| < |\mathcal{P}(S)|$, erhalten wir einen Widerspruch. $\square$

**Satz 5.13.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ sei eine Äquivalenzrelation und*

$$R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

*Es sei $p\colon X \to {}^{X}/_{\sim}, p(x) = [x]_{\sim}$. ${}^{X}/_{\sim}$ trage die Quotiententopologie. Dann gilt:*

1. *${}^{X}/_{\sim}$ ist genau dann ein T1-Raum, wenn jede Äquivalenzklasse abgeschlossen ist.*
2. *Ist ${}^{X}/_{\sim}$ Hausdorff'sch, so ist $R$ (im Produktraum $X \times X$) abgeschlossen.*
3. *Wenn $R$ abgeschlossen ist und $p$ offen ist, so ist ${}^{X}/_{\sim}$ Hausdorff'sch.*
4. *Ist $X$ regulär und $p$ offen und abgeschlossen, so ist ${}^{X}/_{\sim}$ Hausdorff'sch.*
5. *Es sei $X$ regulär, $A$ abgeschlossen und $x \sim y :\Leftrightarrow x = y \vee x, y \in A$, d.h.*

$$[x]_{\sim} = \begin{cases} \{x\} & x \notin A \\ A & x \in A \end{cases}$$

   *Dann ist ${}^{X}/_{\sim}$ Hausdorff'sch.*

6. *Es sei $X$ T4 (normal), $p$ abgeschlossen. Dann ist ${}^{X}/_{\sim}$ T4 (normal).*

*Beweis:*

1. Übung.
2. Es gilt $R = (p \times p)^{-1}(\Delta)$, wobei $\Delta$ die Diagonale in ${}^{X}/_{\sim} \times {}^{X}/_{\sim}$ bezeichnet. Weil ${}^{X}/_{\sim}$ Hausdorff'sch ist, ist $\Delta$ in ${}^{X}/_{\sim} \times {}^{X}/_{\sim}$ abgeschlossen und, weil $p$ (und damit $p \times p$) stetig ist, ist $R$ abgeschlossen.

3. Es sei $x \not\sim y$. Wir suchen $U \in \mathscr{U}_{X/\sim}([x]_\sim), V \in \mathscr{U}_{X/\sim}([y]_\sim)$, sodass $U \cap V = \emptyset$. Nach Voraussetzung ist $(x, y) \notin R$. In $X \times X$ gibt es ein Produkt $Z \times W$ aus offenen Mengen, sodass $(x, y) \in Z \times W$ und $Z \times W \cap R = \emptyset$.
   Es sei $U = p[Z], V = p[W]$. Dann sind $U, V$ offen und $U \cap V = \emptyset$: Anderfalls, sei $[z] \in U \cap V$. Dann gibt es $a \in Z, b \in W$, sodass $p(a) = [z] = p(b)$. Also gilt $a \sim b$ und $(a, b) \in R \cap Z \times W$, ein Widerspruch. Also sind $U, V$ disjunkte Umgebungen von $[x]_\sim$ und $[y]_\sim$.

4. Nach (3) genügt es, zu zeigen, dass $R$ abgeschlossen ist. $\{[y]_\sim\}$ ist abgeschlossen, da $\{y\}$ wegen T1 abgeschlossen ist und $p$ abgeschlossen ist. Da $p$ stetig ist, ist $p^{-1}[\{[y]_\sim\}]$ abgeschlossen in $X$. Es sei $x \not\sim y$. Dann gilt $x \notin p^{-1}[[y]_\sim]$ und letzteres ist abgeschlossen. Nach T3 existieren disjunkte $U_x \in \mathscr{U}(x)$ und $U_y \in \mathscr{U}(p^{-1}[\{[y]_\sim\}])$. Die Menge $p[X \smallsetminus U_y]$ ist abgeschlossen, also ist $W := (X/\sim) \smallsetminus (p[X \smallsetminus U_y])$ offen. Weiterhin ist $p(y) \in W$. Es gilt

$$p^{-1}[W] = p^{-1}[(X/\sim) \smallsetminus (p[X \smallsetminus U_y])] \subseteq X \smallsetminus (X \smallsetminus U_y) = U_y$$

   Weiterhin gilt $U_x \cap p^{-1}[W] = \emptyset$ und $U_x \times p^{-1}[W]$ ist eine Umgebung von $(x, y)$, die disjunkt zu $R$ ist: Es sei $(z, k) \in U_x \times p^{-1}[W]$, sodass $z \sim k$. Dann ist $z \in p^{-1}[\{p(k)\}] \subseteq p^{-1}[W]$, im Widerspruch dazu, dass beide Mengen disjunkt sind. Insgesamt ist $R$ abgeschlossen.

5. Es sei $[x]_\sim \neq [y]_\sim$.

   - 1.Fall: $x \in A, y \notin A$. Nach Regularität von $X$ gibt es eine offene Umgebung $U$ von $A$ und eine offene Umgebung $V$ von $y$, sodass $U \cap V = \emptyset$. $p[V]$ ist eine offene Umgebung von $p[A] = [x]_\sim$ und $p[U]$ eine offene Umgebung von $[y]_\sim$: Da $V \cap A = \emptyset$, ist $p^{-1}[p[V]] = V$, was offen ist und, da $U \supseteq A$, ist $p^{-1}[p[U]] = (U \smallsetminus A) \cup A = U$, was ebenfalls offen ist. Weil $U \cap A = \emptyset$, ist $p[U] \cap p[V] = \emptyset$.
   - 2.Fall: $x \notin A, y \notin A$. Klar.

6. Übung.

□

**Satz 5.14.** *Es seien $g, f \colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{Y})$ stetig, $Y$ sei ein Hausdorff-Raum. Dann gilt*

1. *$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.*
2. *Falls $D \subseteq X$ dicht ist (d.h. $\overline{D} = X$) und $f|_D = g|_D$, dann ist $g = f$.*
3. *$\{(x, y) \mid f(x) = y\} \subseteq X \times Y$ ist abgeschlossen.*
4. *Falls $f$ injektiv ist, so ist $X$ ein Hausdorff-Raum.*

*Beweis:*

1. Die Funktion $(f, g)\colon X \times X \to Y \times Y$, $(f, g)(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$ ist stetig nach Satz 2.17. Weil $Y$ ein Hausdorff-Raum ist, ist, ist $\Delta \subseteq Y \times Y$ abgeschlossen. Damit ist auch $(f, g)^{-1}[\Delta] = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.
2. Es sei $D$ dicht. Nach Voraussetzung ist $D \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} =: \Delta'$. Da $\Delta'$ abgeschlossen ist, ist
$$X = \overline{D} \subseteq \Delta'$$
und damit $X = \Delta'$.
3. Die Funktion $(f, id)\colon X \times Y \to Y \times Y$ ist stetig nach Satz 2.17. Also ist
$$(f, \mathrm{id})^{-1}[\Delta] = \{(x, y) \mid f(x) = id(y)\} = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$$
abgeschlossen.
4. Weil $f$ injektiv ist, ist $f^{-1}$ eine Funktion $f[X] \to X$. Insbesondere ist $f^{-1}$ injektiv, da $f$ eine Funktion ist. Es sei $x \neq y \in X$. damit ist $f(x) \neq f(y) \in Y$, und nach Hausdorff-Eigenschaft von $Y$ gibt es $U, V \in \mathscr{O}_Y$, sodass $f(x) \in U, f(y) \in V, U \cap V = \emptyset$. Nach Stetigkeit von $f$ sind $f^{-1}[U], f^{-1}[V]$ offene Umgebungen von $x$ und $y$, die aufgrund der Injektivität von $f^{-1}$ disjunkt sind. Da $x$ und $y$ beliebig waren, ist $X$ Hausdorff.

□

Da wir Funktionen durch Bildung eines Quotienten ("modding out") injektiv machen können, erhalten wir das folgende Korollar:

**Korollar 5.15.** *Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, $Y$ sei Hausdorff. Es sei $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Dann ist ${}^{X}/_{\sim}$ ein Hausdorff-Raum.*

*Beweis:* Die Funktion $\overline{f}\colon {}^{X}/_{\sim} \to Y$, definiert durch $\overline{f}([x]_\sim) = f(x)$ (Wohldefiniertheit folgt aus der Definition der Äquivalenzrelation), injektiv und stetig nach Satz 2.23, da $\overline{f} \circ p = f$ stetig ist. Nach dem vorherigen Satz ist ${}^{X}/_{\sim}$ ein Hausdorff-Raum. □

**Satz 5.16.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist $X$ T3 genau dann, wenn die abgeschlossenen Mengen eine Umgebungsbasis bilden.*

*Beweis:* Zuerst sei $X$ regulär und $x \in X$, $U \in \mathscr{U}(x)$, $U$ offen. Insbesondere ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen und $x \notin A$. Es gibt also eine Umgebung $V_x$ von $x$ und eine Umgebung $V_A$ von $A$, sodass $V_x \cap V_A = \emptyset$. Also ist $X \setminus V_A$ abgeschlossen, $x \in X \setminus V_A$ und $(X \setminus V_A) \subseteq U$, denn $V_A \supseteq (X \setminus U)$.

Nun sei es der Fall, dass die abgeschlossenen Mengen eine Umgebungsbasis bilden. Es sei $A$ abgeschlossen und $x \notin A$. Es gibt also eine abgeschlossene Umgebung $A_x$ von $x$, die disjunkt zu $A$ ist, und $U_x \subseteq A_x$ offen mit $x \in U_x$. Demnach ist $A \subseteq (X \setminus A_x)$, $X \setminus A_x$ offen und $(X \setminus A_x) \cap U_x = \emptyset$. □

**Satz 5.17** (Über die stetige Fortsetzung einer stetigen Funktion)**.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $D \subseteq X$ dicht. $f\colon D \to Y$ sei stetig (in der Spurtopologie) und $Y$ sei regulär. Dann sind äquivalent:*

1. *$\exists F : X \to Y$, $F$ stetig, $F \supseteq f$*
2. *$\forall x \in X$ ist $f\left(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\}\right)$ ein konvergenter Filter.*

*Beweis:*

- (1)⇒(2). $F(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\})$ ist ein konvergenter Filter, also ist $f_*(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\}) = F(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\})$ auch konvergent nach Satz 4.19.

- (2)⇒(1). Wir setzen $\mathcal{F} := f_*\left(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\}\right)$ (also der pushforward), $F(x) = \lim(\mathcal{F})$ und zeigen, dass $F$ eine Funktion ist, $F \supseteq f$ sowie Stetigkeit in jedem Punkt.
  $F$ ist eine Funktion, denn in Hausdorff-Räumen (also insbesondere in regulären Räumen) sind Grenzwerte von Filtern (falls sie existieren) eindeutig:
  Es sei $x$ ein Grenzwert von $\mathcal{F}$ und $y \in Y$. Es gibt disjunkte Umgebungen $U_x, U_y$ von $x$ und $y$. Weil $\mathcal{F}$ gegen $x$ konvergiert, ist $U_x \in \mathcal{F}$ und, da $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ist $U_y \notin \mathcal{F}$. Also konvergiert $\mathcal{F}$ nicht gegen $y$.

Es sei $x \in D$ und $V \in \mathscr{U}(f(x))$. Weil $f$ stetig ist, ist $f$ insbesondere in $x$ stetig, also ist $f^{-1}[V] \in \mathscr{U}(x)$ (in der Spurtopologie). Also ist $f^{-1}[V] = U \cap D$ mit $U \in \mathscr{U}(x)$. Also ist $V \in \mathcal{F}$ und $f(x)$ ist der Grenzwert von $\mathcal{F}$.
Es sei $x \in X$ beliebig und $V \in \mathscr{U}(F(x))$. Weil die abgeschlossenen Mengen in regulären Räumen eine Umgebungsbasis bilden, können wir annehmen, dass $V$ abgeschlossen ist. Weil $\mathcal{F}$ gegen $F(x)$ konvergiert, ist $V \in \mathcal{F}$ und nach Definition $f^{-1}[V] = U \cap D$ mit $U \in \mathscr{U}(x)$. Weil $f$ in der Spurtopologie stetig ist, ist $f^{-1}[V]$ abgeschlossen.
Wir behaupten, dass $F^{-1}[V] \supseteq U$ ist. Sonst gibt es $x \in U, x \notin F^{-1}[V]$. Dank der Abgeschlossenheit von $f^{-1}[V]$ gibt es eine offene Menge $U_x \ni x$, sodass $U \supseteq U_x$ und $U_x \cap f^{-1}[V] = \emptyset$. Da $U_x$ offen ist, ist $D \cap U_x \neq \emptyset$. Es sei $y \in D \cap U_x$. Dann ist $f(y) \in V$ und, da $F \supseteq f$, auch $F(y) \in V$ und somit $y \in F^{-1}[V]$, ein Widerspruch.
Da $F^{-1}[V] \supseteq U$, ist $F^{-1}[V] \in \mathscr{U}(x)$ und somit ist $F$ in $x$ stetig.

$\square$

# Kapitel 6

# Normale und T4-Räume

**Satz 6.1** (Das Lemma von Urysohn, 1925)**.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum, $A, B$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es eine stetige Funktion*

$$f\colon (X, \mathscr{O}) \to ([0,1], \mathscr{O}_<),$$

*sodass $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$.*

*Beweis:* Wir überlegen uns zuerst: Es sei $C$ abgeschlossen, $O$ offen. Dann gibt es $O_1 \in \mathscr{O}$, sodass

$$C \subseteq O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq O$$

Nun seien $A, B$ abgeschlossen. Damit ist $A \subseteq B^c$ mit $B^c$ offen. Wir definieren induktiv über $k$ für jede dyadische Zahl, d.h. $x = \frac{p}{2^k}, 0 \leq p \leq 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Menge $U_x$, sodass

$$x < x' \longrightarrow U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U_{x'}$$

$k = 0$: Es seien $U_0, U_1$, sodass

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq B^c$$

Indem wir die Vorüberlegung zweimal anwenden.
Es seien alle Mengen für $\frac{p}{2^k}$ definiert. Es sei $x = \frac{p}{2^{k+1}}$, $p$ ungerade. Dann sei $d_1 = \frac{p-1}{2^{k+1}}, d_2 = \frac{p+1}{2^{k+1}}$. Weil $p-1$ und $p+1$ gerade sind, sind für $d_1$ und $d_2$ schon Mengen definiert. Nun sei

$$\overline{U_{d_1}} \subseteq U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U_{d_2}.$$

Indem wir wieder die Vorüberlegung anwenden. Es ist klar, dass die neuen Mengen die Bedingung erfüllen.
Nun sei für jede dyadische Zahl eine Menge definiert. Für eine beliebige Zahl $r$ sei

$$U_r := \bigcup \{U_d \mid d \leq r, d \text{ dyadisch}\}$$

Nun gilt immer noch für $r, r' \in [0,1]$:

$$r < r' \to \overline{U_r} \subseteq U_{r'}. \tag{6.1}$$

Dies folgt, da wir aufgrund der Dichtheit der dyadischen Zahlen in $\mathbb{R}$ ein $d$ finden, sodass $r < d < d' < r'$. Dann folgt

$$U_r \subseteq U_d \Rightarrow \overline{U_r} \subseteq \overline{U_d} \subseteq U_{d'} \subseteq U_{r'}.$$

Nun können wir $f$ definieren: Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } \exists r \in [0,1]\ x \in U_r \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Natürlich gilt $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$. Weiterhin ist $f$ stetig, denn für beliebige $a, b \in [0,1]$ gilt

$$f^{-1}((a,b)) \stackrel{!}{=} (\bigcup_{c<b} U_c) \cap \bigcup_{d>a} (\overline{U_d}^c) = (\bigcup_{c<b} U_c) \setminus \bigcap_{d>a} (\overline{U_d}) := C \setminus D.$$

Wir zeigen, dass $f^{-1}((a,b))$ eine Teilmenge der rechten Seite ist. Falls $d = f(x)$, so ist $x \in U_{d'}$ für alle $d' \geq d$ und $x \notin U'_d$ für alle $d' < d$. Also gibt es $d < b$, sodass $x \in U_d$. $f(x) > a$ impliziert, dass es ein $d > a$ gibt, so dass $x \notin U_d$. Wir können nun $d' = d - \frac{d-a}{2} > a$ und die Implikation (6.1) nehmen, und erhalten ein $d' > a$ mit $x \notin \bar{U}_{d'}$. Damit ist $x \in C$.
Nun zur umgekehrten Inklusion: Falls $x \in C \setminus D$, so gibt es $c < b$, dass $x \in U_c$. Damit ist $f(x) < b$. Weil $x \notin D$, so gibt $d > a$, sodass $x \notin U_d$. Damit ist $f(x) > a$.
Weiterhin ist $C \setminus D$ als Differenz einer offenen und einer abgeschlossenen Menge offen. □

**Korollar 6.2.** *Jeder normale Raum ist ein regulärer Raum.*

*Beweis:* Es sei $A$ abgeschlossen und $x \notin A$. Nach T1 ist $\{x\}$ abgeschlossen und nach dem Lemma von Urysohn gibt es ein stetiges $f$, sodass $f[A] = \{1\}$ und $f(x) = 0$. Also erfüllt der Raum das T3a-Axiom. □

**Definition 6.3.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $A \subseteq X$ heißt $G_\delta$-Menge, falls es $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{O}$ gibt, sodass $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. $A \subseteq X$ heißt $F_\sigma$-Menge, falls $X \smallsetminus A$ eine $G_\delta$-Menge ist.

**Satz 6.4.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum. $A \neq \emptyset$ sei abgeschlossen. Dann sind äquivalent:*

1. *$A$ ist eine $G_\delta$-Menge.*
2. *Es gibt eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$, sodass $f^{-1}[\{0\}] = A$.*

*Beweis:*

- (1)$\Longrightarrow$(2) Wir schreiben $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n$ offen und o.B.d.A. absteigend. Es sei $B_n = X \smallsetminus A_n$. $B_n$ ist abgeschlossen und $A \cap B_n = \emptyset$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon X \to [0,1]$, sodass $f[A] = \{0\}, f[B_n] = \{1\}$. Nun sei

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n$$

  $f(x)$ ist stetig, da die Summe gleichmäßig gegen $f$ konvergiert und endliche Summen stetiger Funktionen stetig sind. Nun gilt $f^{-1}[\{0\}] = A$, denn, falls $f(x) = 0$, so ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $x \notin X \smallsetminus B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = A$.

- (2)$\Longrightarrow$(1). Es gilt $A = f^{-1}[\{0\}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)\right)$.

□

**Satz 6.5** (Zwei Verschärfungen des Urysohn-Lemmas)**.** *Es sei $X$ ein T4-Raum. Es seien $A, B$ abgeschlossene Mengen, $A \cap B = \emptyset$.*

1. *Es sei $A \neq \emptyset$ eine $G_\delta$-Menge. Dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$, sodass $f^{-1}[\{0\}] = A$ und $f^{-1}[\{1\}] \supseteq B$.*
2. *Es seien $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ $G_\delta$-Mengen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$, sodass $f^{-1}[\{0\}] = A, f^{-1}[\{1\}] = B$.*

*Beweis:*

1. Wir nehmen $g$ wie aus Satz 6.4, d.h. $g\colon X \to [0,1]$ stetig, $g^{-1}[\{0\}] = A$. Dann nehmen wir $f$ wie aus Satz 6.1, d.h. $f\colon X \to [0,1]$, $f[A] = \{0\}, f[B] = \{1\}$. Nun ist $h := \max(f, g)$ wie gewünscht.

2. Wir modifizieren 1. durch Ersetzen von $g$ durch $1-g$ und erhalten eine stetige Funktion $k\colon X \to [0,1]$ mit $k^{-1}[\{1\}] = B, k^{-1}[\{0\}] \supseteq A$. Es sei $f$ wie in Satz 6.1. Dann erfüllt
$$e := \frac{1}{2}(h + \min(f,k)) = \frac{1}{2}(\max(h,f) + \min(k,f))$$
die Bedingung.

□

**Lemma 6.6.** *Es sei $A$ abgeschlossen, $A \subseteq X$, wobei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum ist. Es sei $f\colon A \to [-1,1]$ stetig. Dann gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $n$:*

1. *$g_n\colon X \to [-1,1]$ ist stetig.*
2. *$\forall x \in X \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq g_n(x) \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.*
3. *$\forall x \in A |f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$*
4. *$\forall x \in X |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$*
5. *$\forall p \in \mathbb{N} \forall m,n \geq p |g_m(x) - g_n(x)| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^p$*

*Beweis:* Wir zeigen die Existenz induktiv über $n$.

- Anfang: Es sei $g_0 \equiv 0$. $g_0$ erfüllt alle Bedingungen.
- Induktionsschritt: Es sei $g_n$ definiert. Dann sind
$$B_{n+1} := \left\{x \in A \mid f(x) - g_n(x) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
$$C_{n+1} := \left\{x \in A \mid f(x) - g_n(x) \leq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
abgeschlossen und disjunkt. Nach Satz 6.1 gibt es eine stetige Funktion
$$v_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$
sodass
$$v_n[B_{n+1}] = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}, v_n[C_{n+1}] = \left\{\frac{-1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
Setze nun $g_{n+1} = g_n + v_n$. Nun prüfen wir, ob $g_{n+1}$ die Eigenschaften (1) bis (4) hat:

1. ist klar, da $g_n$ und $v_n$ stetig sind.
2. Ist ebenfalls per Definition von $g_n$ klar.
3. Falls $x \in B_{n+1} \cup C_{n+1}$, so folgt
$$|f(x) - g_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$
da $v_n$ die Abschätzung $|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ aus der Induktionsvoraussetzung um $\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ verbessert.
Falls $x \notin (B_{n+1} \cup C_{n+1})$, so folgt
$$|f(x) - g_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$
aus den Definitionen von $B_{n+1}$ und $C_{n+1}$ und der Tatsache, dass $v_n$ die Fallvoraussetzung $f(x) - g_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ um höchstens $\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ verschlechtern kann.
4. Klar, da
5. Klar, da
$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| = |v_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Schließlich erhalten wir auch den Punkt 5, durch Aufsummierung der geometrischen Reihe.

□

Das Lemma funktioniert auch mit dem Zielraum $(-1, 1)$ statt $[-1, 1]$.

**Lemma 6.7.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum. Dann lässt sich jede stetige Funktion $f\colon A \to (-1, 1)$ zu einer stetigen Funktion $\overline{f}\colon X \to (-1, 1)$ fortsetzen (wenn $A$ abgeschlossen ist und die Spurtopologie von $X$ trägt).*

*Beweis:* Es sei $g_n$ wie in Lemma 6.6. Dann ist $F(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ eine stetige Funktion, da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $X$ gleichmäßig konvergiert. Nach Eigenschaft c ist $F(x) = f(x)$. □

**Satz 6.8** (Fortsetzungssatz von Tietze, 1915)**.** *Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ ist T4 genau dann, wenn sich jede stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Funktion $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt (wenn $A$ abgeschlossen ist und die Spurtopologie von $X$ trägt).*

*Beweis:* Es sei $f$ wie in Lemma 6.7. Dann ist $\tilde{f} = \frac{2}{\pi} \arctan \circ f$ eine stetige Funktion von $A$ nach $(-1, 1)$. Nach Lemma 6.7 gibt es $\tilde{F} \colon X \to (-1, 1)$ stetig. Nun ist $F := \frac{\pi}{2} \tan \circ (\frac{\pi}{2} \tilde{F})$ eine Fortsetzung von $f$.
Es seien $A, B$ abgeschlossen und disjunkt. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Dann ist $f$ stetig bzgl. der Spurtopologie auf $A \cup B$, da in dieser $A = X \cap (X \smallsetminus B), B = X \cap (X \smallsetminus A)$ offen sind. Also lässt sich $f$ zu einer stetigen Funktion auf $X$ fortsetzen. Dann erfüllt $f$ die Anforderungen von Satz 6.1, also ist $X$ ein T4-Raum. $\square$

# Kapitel 7

# Kompaktheit

**Definition 7.1.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathscr{O})$ heißt *kompakt*, wenn

$$\forall \mathscr{U} \subseteq \mathscr{O} \left( \bigcup \mathscr{U} = X \to \exists \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}, |\mathscr{U}_0| \in \omega \wedge \bigcup \mathscr{U}_0 = X \right)$$

**Definition 7.2.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathscr{O})$ heißt Bourbaki-kompakt, wenn $(X, \mathscr{O})$ kompakt und Hausdorff'sch ist.

**Satz 7.3.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

1. *$X$ ist kompakt.*
2. *Es sei $\mathscr{A}$ das System der abgeschlossenen Mengen.*
$$\forall \mathscr{L} \subseteq \mathscr{A} ( \left( \bigcap \mathscr{L} = \emptyset \to \exists \mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}, |\mathscr{L}_0| \in \omega \wedge \bigcap \mathscr{L}_0 = \emptyset \right)$$
3. *Jeder Filter auf $X$ hat einen Berührungspunkt.*
4. *Jeder Ultrafilter ist konvergent.*

*Beweis:*

- Es sei $\bigcap \mathscr{L} = \emptyset$. Dann ist
$$\bigcup \underbrace{\{X \setminus B \mid B \in \mathscr{L}\}}_{=:\mathscr{U}} = X$$
Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathscr{U}_0$. Dann ist
$$\bigcap \underbrace{\{X \setminus B \mid B \in \mathscr{U}_0\}}_{\subseteq \mathscr{L}} = \emptyset$$

- Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$. Falls $F$ keinen Berührpunkt hat, gibt es für alle $x \in X$ ein $F \in \mathcal{F}$, sodass $x \notin \overline{F}$. Damit ist

$$\bigcap \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$$

  Also gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, sodass $\mathcal{F}_0$ endlich und $\bigcap \mathcal{F}_0 \subseteq \bigcap \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}_0\} = \emptyset$. Aber Filter sind bezüglich endlichen Schnitten abgeschlossen und $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ein Widerspruch.

- Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Nach (3) hat $\mathcal{U}$ einen Häufungspunkt. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, konvergiert $\mathcal{U}$ gegen $x$, denn für $U \in \mathscr{U}$ gilt $X \smallsetminus U \notin \mathcal{U}$ (da $x$ ein Berührpunkt ist) und somit $U \in \mathcal{U}$.

- Es sei $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung. Wenn $\mathscr{U}$ keine offene Teilüberdeckung hat, dann ist

$$\mathcal{F} = \{X \smallsetminus \bigcup \mathcal{U}_0 \mid |\mathscr{U}_0| \in \omega, \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}\}$$

  ein Filter. Nach dem Ultrafilter-Lemma ist $\mathscr{U}$ in einem Ultrafilter enthalten. Dieser wäre dann aber nicht konvergent: Es sei $x \in X$. Dann gibt es $U \in \mathscr{U}$, s.d. $x \in U$. Weiterhin ist $U \notin \mathcal{F}$ und damit $\mathscr{U}(x) \not\subseteq \mathcal{F}$.

□

**Satz 7.4** (Satz von Alexander, ZF+PI)**.** *Es sei $\mathscr{S}$ eine Subbasis von $(X, \mathscr{O})$. Dann ist $X$ kompakt, wenn jede Überdeckung von $X$ mit Mengen aus $\mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat.*

*Beweis:* Annahme: $X$ ist nicht kompakt. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf $X$, der nicht konvergiert:

$$\forall x \in X, \exists U_x \in \mathscr{U}(x), (X \smallsetminus U_x) \in \mathcal{F}.$$

Nach der Definition einer Subbasis hat jedes $U_x$ eine Teilmenge der Form $\bigcap_{k \leq n} U_{k,x}$ mit $U_{k,x} \in \mathscr{S}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es ist $X \setminus U_x \subseteq X \setminus \bigcap_{k \leq n} U_{k,i} = \bigcup_{k \leq n} (X \setminus X_{k,x}) \in \mathcal{F}$. Dann ist für ein $U_{k,x}$ schon $X \setminus U_{k,x} \in \mathcal{F}$, da der Filter $\mathcal{F}$ ultra ist. Somit erhalten wir (nach Umbenennen von $X_{k,x}$ zu $U_x$):

$$\forall x \in X, \exists U_x \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{S}, (X \smallsetminus U_x) \in \mathcal{F}.$$

[Anmerkung über die benutzten Axiome: Wenn man diese Passage hier ohne das Auswahlaxiom durchführen möchte, muss man alle Beispiele $U_x$ mittragen, also für jedes $x$ womöglich viele Mengen. Man braucht die $U_x$ nicht auszuwählen, man kann einfach alle nehmen, und von jedem einzelnen geht man zu allen seinen Subbasis-Repräsentanten über. Die Wahl des $k \leq n$ übernimmt dann der Filter. Dann hat man eine riesige Überdeckung von $X$ mit Elementen aus $\mathscr{S}$. ] Weil $\bigcup\{U_x \mid x \in X\} = X$, existiert nach der Voraussetzung über Überdeckungen aus Elementen von $\mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup\{U_x \mid x \in X_0\}$. Dann ist nach De Morgan:

$$\bigcap_{x \in X_0} (X \smallsetminus U_x) = X \smallsetminus \bigcup_{x \in X_0} U_x = \emptyset \in \mathcal{F}.$$

Also ist $\mathcal{F}$ kein Filter. Unsere Annahme führt also in einen Widerspruch. □

**Lemma 7.5.** *Es seien $X$ ein Hausdorff-Raum und $K$ eine kompakte Teilmenge von $X$. Es sei $x \in X \smallsetminus K$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U$ von $x$ und $V$ von $K$, s.d. $U \cap V = \emptyset$.*

*Beweis:* Es gilt $\forall k \in K, x \neq k$. Nach Hausdorff-Eigenschaft gibt es $U_k$, $V_k$, $x \in U_k$, $k \in V_k$ mit $U_k \cap V_k = \emptyset$. Da $K$ kompakt ist, gibt es endlich viele $k_0, \ldots, k_n$, sodass $K \subseteq \bigcup_{j=0}^n V_{k_j}$. Es sei $U = \bigcap_{j=0}^n U_{k_j}$, $V = \bigcup_{j=0}^n V_{k_j}$. Dann ist

$$U \cap V = \left(\bigcap_{j=0}^n U_{k_j}\right) \cap \left(\bigcup_{i=0}^n V_{k_i}\right) \subseteq \bigcup_{j=0}^n (U_{k_j} \cap V_{k_j}) = \emptyset$$

□

**Satz 7.6.**

1. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.*
2. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.*

*Beweis:*

1. Es sei $A \subseteq K$ abgeschlossen, $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von $A$. Dann ist $\mathscr{U} \cup \{K \smallsetminus A\}$ eine offene Überdeckung von $K$. Diese hat eine endliche Teilüberdeckung $\mathscr{U}_0 \cup \{X \smallsetminus A\}$. Dann ist $\mathscr{U}_0$ eine offene Überdeckung von $A$.
2. Es sei $K$ kompakt, $x \notin K$. Nach Lemma 7.5 gibt es eine offene Umgebung $U_x$ von $x$, sodass $U_x \cap K = \emptyset$. Also ist $x \notin \overline{K}$. Da dies für alle $x \notin K$ gilt, ist $\overline{K} = K$.

□

**Satz 7.7.** *Es sei $K$ kompakt und Hausdorff. Es seien $A, B \subseteq K$ abgeschlossen. Dann gibt es offene Mengen $U, V$, sodass $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$.*

*Beweis:* Wir wenden Lemma 7.5 zweimal an: Für $x \in B$ seien $U_x, V_x$, sodass $A \subseteq U_x, x \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$. Die Mengen $\{V_x \mid x \in B\}$ überdecken $B$, enthalten also eine endliche Teilüberdeckung. Mit $U = \bigcap_{x \in B_0} U_x, V = \bigcup_{x \in B_0} V_x$ gilt dann $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$. □

**Satz 7.8.** *Es sei $X$ kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f[X]$ kompakt.*

*Beweis:* Es sei $\mathscr{V}$ eine offene Überdeckung von $f[X]$. Dann ist

$$\mathscr{U} := \{f^{-1}[V] \mid V \in \mathscr{V}\}$$

eine offene Überdeckung von $X$. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$\mathscr{U}_0 = \{f^{-1}[V] \mid V \in \mathscr{V}_0\}$$

Also ist $\mathscr{V}_0$ eine endliche Teilüberdeckung von $Y$. □

**Satz 7.9.** *Es sei $X$ kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig und $Y$ ein Hausdorff-Raum. Dann ist $f$ abgeschlossen.*

*Beweis:* Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nach Satz 7.6 ist $A$ kompakt, also ist $f[A]$ kompakt (nach Satz 7.8). Somit ist $f[A]$ abgeschlossen (erneut nach Satz 7.6). □

**Satz 7.10.** *Es sei $X$ kompakt, $Y$ Hausdorff, $f\colon X \to Y$ stetig und injektiv. Dann ist $f$ eine Einbettung.*

*Beweis:* $f$ ist abgeschlossen nach Satz 7.9. Da $f$ injektiv ist, ist $f$ damit auch offen (da $f[X \setminus A] = f[X] \setminus f[A]$). Also ist $f\colon X \to f[X]$ stetig, offen und abgeschlossen, sowie bijektiv. Damit ist $f$ eine Einbettung. □

**Satz 7.11** (Tychonoff, 1930)**.** *Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i \in I \neq \emptyset}$ topologische Räume. Dann gilt:*

1. *Wenn alle $X_i$ kompakt sind, dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.*
2. *Wenn $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt und nicht leer ist, so ist jedes $X_i$ kompakt.*
3. *Wenn alle $X_i$ kompakt und Hausdorff sind, dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt und Hausdorff.*

*Beweis:* 1. Falls es ein $i \in I$ gibt, sodass $X_i = \emptyset$, dann ist $\prod X_i = \emptyset$ und somit kompakt.
Es sei $\prod X_i \neq \emptyset$ und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $X$. Dann ist

$$p_i[\mathcal{U}] = \{A \subseteq X_i \mid p_i^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}$$

ein Ultrafilter. Da $X_i$ kompakt ist, konvergiert $p_i[\mathcal{U}]$ gegen ein $x_i \in X_i$ (dieses ist eindeutig, falls $X_i$ Hausdorff ist). Wir haben also

$$\mathcal{U}_{X_i}(x_i) \subseteq p_i[\mathcal{U}].$$

Mit AC nehmen wir ein $x$ so dass $x = (x_i)_{i \in I}$. (Falls alle Räume $X_i$ Hausdorff'sch sind, wird hier das Auswahlaxiom nicht gebraucht. Das Axiom PI (prime ideal), das sagt "jeder Filter lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern" genügt.) Wir zeigen $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U}$:
Es reicht, sich auf eine Subbasis zu beschränken. Es sei $U \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{S}$. Dann ist für ein $i \in I$, $U = U_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j = p_i^{-1}[U_i] \in \mathcal{U}$.

2. Weil $p_i$ stetig und $\prod_{i \in I} X_i$ nichtleer und kompakt ist, ist $p_i[X] = X_i$ kompakt.

3. $T2$ vererbt sich auf Produkte.

□

**Satz 7.12** (Heine-Borel)**.** *Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

*Beweis:* Weil $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum die Hausdorff-Eigenschaft hat, ist $K$ abgeschlossen. Weiterhin ist

$$K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B(0, n)$$

Also hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, $\{B(0, n_i), i \leq k\}$. Dann ist $K \subseteq B(0, n)$ mit $n = \max(n_1, ..., n_k)$.
Die Rückrichtung wird in der Analysis bewiesen. □

# Kapitel 8

# Satz von Stone-Weierstraß

**Definition 8.1.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.

$$C(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$

ist die Menge aller stetigen reellen Funktionen auf $X$.

**Definition 8.2.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein kompakter topologischer Raum. Auf $C(X)$ definieren wir folgende Metrik:

$$d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}.$$

Die Metrik $d$ heißt auch die Supremumsmetrik und die von ihr auf $C(X)$ erzeugte Topologie heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

*Bemerkung* 8.3. Die Metrik ist wohldefiniert, da $f(X)$ als kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ insbesondere beschränkt ist und somit ein Supremum besitzt. Dass alle geforderten Metrik-Eigenschaften erfüllt sind, ist klar.

**Definition 8.4.** Es sei $V = (V, +)$ ein $K$-Vektorraum, wobei $K$ ein Körper ist. $(V, +, \cdot_V, \cdot_{skalar})$ ist eine *$K$-Algebra*, falls $(V, +, 0, \cdot)$ ein Ring ist.

*Beispiele* 8.5.

1. Der Raum der Polynome über $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}[X] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

   ist ein unendlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Monome $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Basis. Mit der bekannten Multiplikation ist $\mathbb{R}[X]$ eine $\mathbb{R}$-Algebra.

2. Der Raum der stetigen Funktionen $C(X)$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra mit $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).(f+g)(x) = f(x) + g(x), (r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$. Er besitzt sogar eine 1, nämlich die konstante 1-Funktion.

**Definition 8.6.** Es sei $D \subseteq C(X)$. $A(D)$ sei die von $D$ in $C(X)$ erzeugte Unteralgebra von $C(X)$, d.h. $C(X)$ ist die Menge der Polynome in Elementen von $D$:

$$A(D) = \left\{ \sum_{0 \leq \nu_1, \ldots, \nu_r \leq n} a_{\nu_1, \ldots, \nu_r} d_1^{\nu_1} \ldots d_r^{\nu_r} \mid n, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, d_1, \ldots, d_r \in D, a_{\nu_1, \ldots, \nu_r} \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Satz 8.7** (Der Satz von Stone und Weierstrass, 1885 und 1937)**.** *Es sei $X$ kompakt und Hausdorff'sch, $D \subseteq C(X)$ erfülle*

*(a)* $\forall x \in X \exists f_x \in D f_x(x) \neq 0$

*(b)* $\forall x, y \in X (x \neq y \to \exists f_{x,y} \in D f_{x,y}(x) \neq f_{x,y}(y))$

*Dann gilt in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Raum $(C(X), d)$, dass $\overline{A(D)} = C(X)$.*

**Lemma 8.8.** *Es gibt Polynome $p_n \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\forall n p_n(0) = 0$ und auf $I = [0,1]$ die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $t \mapsto \sqrt{t}$ konvergiert.*

*Beweis:* Wir setzen:

$$p_0(t) = 0, p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right)$$

Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(\sqrt{t} - p_{n+1}(t)) = (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \tag{1}$$

Wir beweisen induktiv über $n$ gleichzeitig noch zwei Eigenschaften:

$$\forall t \; p_n(t) \geq 0 \tag{2}$$

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \tag{3}$$

- Der Anfang ist klar.

- Gelte $(2)_n$ und $(3)_n$. Zu zeigen ist $(2)_{n+1}$ und $(3)_{n+1}$. Es gilt

$$p_{n+1}(t) = \underbrace{p_n(t)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}(t - p_n^2(t))}_{\geq 0 \text{ nach } 3_n} \geq 0$$

Wir setzen Gleichung (1) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&(2 + (n+1)\sqrt{t})(...) = ((2 + (n+1)\sqrt{t})(\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&+ ((2 + n\sqrt{t})(\sqrt{t} - p_n(t)) + \sqrt{t}(\sqrt{t} + p_n(t))(1\frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&\leq (2\sqrt{t} + \sqrt{t}(\sqrt{t} + p_n(t)))(1 - \frac{1}{2})(\sqrt{t} + p_n(t)) \\
&= 2\sqrt{t}(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&= 2\sqrt{t}(1 - \frac{1}{4}(\sqrt{t} + p_n(t))^2) \leq 2\sqrt{t}
\end{aligned}$$

Aus (3) folgt, dass

$$\sup\{|\sqrt{t} - p_n(t)| \mid t \in [0,1]\} \to 0$$

□

**Lemma 8.9.** *Es sei $I = [-a, a], a \in \mathbb{R}, a > 0$. Dan gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $I$ gleichmäßig gegen $t \mapsto |t|$ konvergiert.*

*Beweis:* Es seien die $p_n$ wie in Lemma 8.8 und sei

$$q_n := a \cdot p_n \left(\frac{t}{a}\right)^2$$

Dann konvergiert die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $|t|$ auf $[-a, a]$. □

**Lemma 8.10.** *Es sei $X$ kompakt und Hausdorff'sch. Es sei $A \subseteq C(X)$ eine topologisch abgeschlossene Unteralgebra von $C(X)$. Dann sind für $f, g \in A$ auch die Funktionen $|f| \in A, \max\{f, g\} \in A, \min\{f, g\} \in A$.*

*Beweis:* Es ist

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|, \max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$$

Also bleibt nur zu zeigen, dass $f \in A \longrightarrow |f| \in A$. Wir haben $q_n(t)$ wie im 2.Lemma, dass auf $[-a, a]$ gleichmäßig gegen $|t|$ konvergiert. Dann konvergiert $q_n \circ f$ gleichmäßig gegen $|f|$, denn, falls $\forall t \in [-a, a] |q_n(t) - |t|| < \varepsilon$, so ist $\forall x \in X |q_n(f(x)) - |f(x)|| < \varepsilon$. $q_n \circ f \in A$, da $A$ eine Unteralgebra und $q_n$ ein Polynom ist. $\square$

**Lemma 8.11.** *Es sei $A$ eine Unteralgebra von $C(X)$, $X$ kompakt und Hausdorff'sch. Dann ist $\overline{A}$ eine Unteralgebra von $C(X)$.*

*Beweis:* Da $C(X)$ ein metrischer Raum ist, hat jedes $f \in C(X)$ eine abzählbare Umgebungsbasis.
Es sei $f, g \in \overline{A}, c \in \mathbb{R}$. Es gibt zu $f$ und $g$ konvergente Folgen $q_{f,n}, q_{g,n}$ aus $A$. Dann ist z.B. $f \cdot g = \lim_{n\to\infty}(q_{f,n} \cdot q_{g,n})$. $\square$

*Beweis des Satzes:* Es sei $D \subseteq C(X)$ wie in der Voraussetzung, $f \in C(X)$. Zu zeigen: $d \in \overline{A(D)}$.

- 1.Schritt: Zu je zwei Punkten $y, z \in X$ gibt es ein $h \in A(D)$, sodass $h(y) = f(y), h(z) = f(z)$: Es gilt nach Voraussetzung $f_1 \in D, f_1(y) \neq 0, f_2 \in D, f_z(z) \neq 0$. Dann ist $f_y = \frac{f_1}{f_1(y)}, f_z = \frac{f_2}{f_2(z)}$, sodass $f_y(y) = 1, f_z(y) = 1$. Weiterhin gilt

  $$h_1 := f_y + f_z - f_y \cdot f_z \in A(D) \Longrightarrow h_1(y) = h_1(z) = 1$$

  Falls $y \neq z$, so gibt es nach Voraussetzung $h_2 \in D, h_2(y) \neq h_2(z)$. Dann erfüllt

  $$h := \frac{f(y) - f(z)}{h_2(y) - h_2(z)} \cdot h_2 - \frac{f(y)h_2(z) - f(z)h_2(y)}{h_2(y) - h_2(z)} \in A(D)$$

  die Bedingung.
  Falls $z = y$, so nehmen wir

  $$h = \frac{f(y)}{f_y(y)} \cdot f_y$$

- 2.Schritt: Nun nutzen wir die Kompaktheit von $X$. Behauptung:

  $$\forall \varepsilon > 0 \exists z \in X \exists h_z \in \overline{A(D)} h_z(z) = f(z) \wedge \forall x \in X h_z(x) < f(x) + \varepsilon$$

Für alle $y \in X \exists g_y \in A(D)$, sodass $g_y(z) = f(z), g_y(y) = f(y)$ nach dem ersten Schritt.

$$\forall y \exists U_y \in \mathscr{U}(y) \forall z \in U_y g_y(z) < f(z) + \varepsilon$$

nach Stetigkeit von $f$. Die Mengen $\{U_y \mid y \in X\}$ überdecken $X$ und besitzen somit eine endliche Teilüberdeckung $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$. Dann erfüllt

$$h_z := \min\{g_{y_i} \mid i = 1, ..., k\}$$

die Bedingung.

- 3.Schritt: $\forall z \in X$ sei $h_u$ wie im zweiten Schritt. Dan gibt es Umgebungen, s.d. $h_z(y) > f(y) - \varepsilon$ in der Umgebung. Bilden des Maximums zeigt die Behauptung.

$\square$

# Kapitel 9

# Uniforme Räume

**Definition 9.1.** Es sei $X$ eine Menge und seien $A, B \subseteq X \times X$. Wir setzen

(a) $A^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$.

(b) $BA = \{(x, y) \mid \exists z (z, y) \in B \wedge (x, z) \in A\}$.

(c) $A^2 = AA$, $A^{n+1} = A^n A$.

(d) $A \subseteq X \times X$ heißt symmetrisch, wenn $A^{-1} = A$,

(e) Wenn $X$ aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$.

Nun gelten $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $A(BC) = (AB)C$. Wenn $A \subseteq B$, so ist $A^{-1} \subseteq B^{-1}$ und für jedes $C$, $AC \subseteq BC$, $CA \subseteq CB$. Falls $\Delta \subseteq A$ so ist $A \subseteq A^n$.

**Definition 9.2.** $X$ Menge. $\mathscr{U} \subseteq X \times X$ heißt uniforme Struktur oder Nachbarschaftsfilter auf $X$, wenn folgendes gilt

$\mathscr{U} \neq \emptyset$ und $\forall A \in \mathscr{U} (\forall B \subseteq X \times X)(B \supseteq A \to B \in \mathscr{U})$.

$\mathscr{U}$ ist gegen endliche Schnitte abgeschlossen

$\forall A \in \mathscr{U} \ \Delta \subseteq A$.

$(\forall U \in \mathscr{U})(U^{-1} \in \mathscr{U})$.

$\forall U \in \mathscr{U} \exists V \in \mathscr{U} V^2 \subseteq U$.

$(X, \mathscr{U})$ heißt uniformer Raum.

**Definition 9.3.** Es sei $\mathscr{U}$ eine uniforme Struktur. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ heißt Fundamentalsystem für $\mathscr{U}$, wenn $\forall U \in \mathscr{U} \exists B \in \mathscr{B} B \subseteq U$.

**Satz 9.4.** *Ist $\mathscr{B}$ eine Fundmentalsystem für $\mathscr{U}$ so sind auch $\mathscr{B}' = \{A \cap A^{-1} \mid A \in \mathscr{B}\}$ und $\mathscr{B}_n = \{A^n \mid A \in \mathscr{B}\}$ Fundamentalsysteme.*

*Beweis:* $\square$

**Satz 9.5.** *Es sei $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$. $\mathscr{B}$ ist Basis für eine uniforme Struktur genau dann wenn folgendes gilt:*

*(a) Für jedes endliche Teilmenge $\mathscr{B}_0$ von $\mathscr{B}$ gibt es ein $C \in \mathscr{B}$, so dass $C \subseteq \bigcap \mathscr{B}_0$.*

*(b) $\forall B \in \mathscr{B} \Delta \subseteq B$.*

*(c) $\forall B \in \mathscr{B} \exists B' \in \mathscr{B} B' \subseteq B^{-1}$.*

*(d) $\forall B \in \mathscr{B} \exists B' \in \mathscr{B} (B')^2 \subseteq B$.*

*Wenn (a) bis (d) gelten, dann ist $\mathscr{B}$ Basis der uniformen Struktur $\mathscr{U}(\mathscr{B}) = \{V \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathscr{B} B \subseteq V\}$.*

# Teil II

# Algebraische Topologie

# Kapitel 10

# Quotienten und Gruppenoperationen

Wir erinnern uns zuerst an die Quotiententopologie: Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $p\colon X \to {}^{X}/_{\sim}$ definiert durch $p(x) = [x]_{\sim}$. Die Quotiententopologie von $(X, \mathscr{O}, \sim)$, die auf ${}^{X}/_{\sim}$ lebt, ist gegeben durch

$$\mathscr{O}_{\sim} := \{V \subseteq {}^{X}/_{\sim} \mid p^{-1}[V] \in \mathscr{O}\}$$

**Satz 10.1.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt:*

1. *Wenn $X$ kompakt ist, so ist ${}^{X}/_{\sim}$ kompakt.*
2. *Wenn $X$ (weg-) zusammenhängend ist, so ist ${}^{X}/_{\sim}$ (weg-) zusammenhängend.*

*Beweis:*

1. $p$ ist stetig, also ist $p[X]$ kompakt. Weil $p$ surjektiv ist, ist $p[X] = {}^{X}/_{\sim}$.
2. $p$ ist stetig, also ist $p[X]$ (weg-) zusammenhängend. Weil $p$ surjektiv ist, ist $p[X] = {}^{X}/_{\sim}$.

□

*Beispiele* 10.2 (Das Zusammenfalten von Räumen). Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wir schreiben ${}^{X}/_{A}$ für ${}^{X}/_{\sim}$, wenn $\sim$ wie folgt definiert ist:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y & x \notin A \\ x, y \in A & \end{cases}$$

Dies lässt sich auch endlich oft iterieren:

$$X/_{A_1, A_2} = {}^{(X/A_1)}/_{(A_2/A_1)}$$

Für zwei abgeschlossene, disjunkte Mengen. Alternativ kann man auch $\sim$ wie folgt definieren:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y & x \notin A_1 \cup A_2 \\ x, y \in A_1 \\ x, y \in A_2 \end{cases}$$

Warum nimmt man in diesem Beispiel abgeschlossene Mengen $A$? Man möchte Satz 5.13(3) und weitere Teile dieses Satzes anwenden.

*Beispiel* 10.3 (Homöomorphietyp eines Kegels). Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Der Kegel $CX$ (der in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden kann) ist definiert als

$$CX := {}^{X \times [0,1]}/_{X \times \{1\}}$$

Es sei $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\}$. $CX$ ist homöomorph zu

$$\tilde{CX} := \{(1-t) \cdot x' + t \cdot p \mid t \in [0,1], x' \in X \times \{0\}\}$$

*Beweis:* Es sei $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Wir definieren $\tilde{f} \colon X \times [0,1] \to \tilde{CX}$ wie folgt:

$$\tilde{f}(x,t) := (1-t) \cdot (x,0) + p \cdot t.$$

Wenn $x \in X$, so ist $(x,0) \in X \times \{0\}$; daher geht die Abbildung in den angegebenen Bildraum. Die Abbildung $\tilde{f}$ ist stetig nach unserer Kenntnis der Analysis. Weiterhin gilt

$$\tilde{f}[X \times \{1\}] = \{p\}$$

Ebenfalls ist $\tilde{f} \restriction X \times [0,1)$ injektiv. Also ist die Quotientenabbildung $f([x]) = \tilde{f}(x)$ wohldefiniert, stetig und bijektiv. Wenn $X$ kompakt ist, so nach Satz 7.10 $\tilde{f}$ offen (auf dem Bildraum nimmt man die Spurtopologie von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $\tilde{CX}$). Nach der Definition der Quotiententopologie ist auch $f$ mit $f \circ p = \tilde{f}$ offen.

Ein gesuchter Homöomorphismus $f \colon CX \to \tilde{CX}$ ergibt sich als $f([x]_\sim) = \tilde{f}(x)$. $\square$

*Beispiel* 10.4 (Die abgeschlossene Einheitskugel). Es sei

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\},\ S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

Es gilt $S^{n-1} = \partial B^n$. Es sei $n \geq 1$. Dann gilt

$$B^n/S^{n-1} \cong S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

*Beweis:* Wir definieren zuerst $\tilde{f}\colon B^n \to S^n$ durch

$$\tilde{f}(x) = -\cos(\pi \cdot |x|) \cdot e_{n+1} + \sin(\pi \cdot |x|) \cdot (\frac{x}{|x|}, 0).$$

Wir glauben, dass $\tilde{f}$ stetig ist und dass $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = S^n$ ist. Weiterhin ist $\tilde{f} \restriction (B^n \setminus S^{n-1})$ injektiv und $\tilde{f}[S^{n-1}] = \{e_{n+1}\}$. Also ist

$$f\colon B^n/S^{n-1} \to S^n,\ \text{mit } f([x]_\sim) = \tilde{f}(x)$$

ein gesuchter Homöomorphismus. □

*Beispiel* 10.5. Es gilt

$$\frac{S^n \times [-1,1]}{S^n \times \{1\}, S^n \times \{-1\}} \cong S^{n+1}$$

*Beweis:* Es sei $H\colon S^n \times [-1,1] \to S^{n+1}$ definiert durch

$$H(x,t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)(0,-1) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)(x,0).$$

Dann gilt $H(x,t) \in S^{n+1}$, falls $x \in S^n$, $t \in [-1,1]$. Nun ist $H(x,t) = H(y,s)$ nur für $s = 1 = 1$ oder $s = t = -1$, also nur für $(x,t) \sim (y,s)$. Wenn wir uns erneut auf die induzierte Abbildung $f([x,t]_\sim) = H(x,t)$ zurückziehen, erhalten wir den gewünschten Homöomorphismus. □

**Definition 10.6** (und Existenzbehauptung)**.** Es seien $X$ eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Relation. Dann ist Eq(R) die kleinste Äquivalenzrelation auf $X$, sodass Eq(R) $\supseteq R$. *$Eq(R)$ heißt die von $R$ erzeugte Äquivalenzrelation*

$$\mathrm{Eq(R)} := \bigcap\{R' \supseteq R \mid R' \text{ Äquivalenzrelation}\}.$$

Wir schneiden über eine nichtleere Menge, da $X \times X \supseteq Eq(R)$ eine Äquivalenzrelation ist. Man überlege sich, dass dies wohldefiniert ist. Dazu kann man

zum Beispiel zeigen, dass der Schnitt beliebig vieler Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist.

Alternativ kann man $R$ auch von unten her konstruieren: Wir definieren induktiv über $n \in \mathbb{N}$ eine relation $R_n$. $R_0 = \Delta \cup R$,

$$R_{n+1} = R_n \cup \{(x, z) \mid \exists y (x, y) \in R_n \wedge (y, z) \in R_n\}$$

Dann ist $\bigcup R_{n+1}$ eine Äquivalenzrelation, und es gilt $\mathrm{Eq(R)} = \bigcup R_{n+1}$.

*Beispiel* 10.7 (Möbiusband). Es sei $X := [0, 1] \times [0, 1]$, und $R$ definiert durch $R = \{((0, y), (1, 1 - y)) \mid y \in [0, 1]\}$. Es sei $\sim$ die von $R$ erzeugte Äquivalenzrelation (wobei wir lediglich die Diagonale hinzufügen). Dann heißt ${}^{X}/_{\sim}$ Möbiusband.

*Beispiel* 10.8 (Klein'sche Flasche). Es sei

$$X = S^1 \times [0, 1],\ R := \{((x, y, 0), (x, -y, 1)) \mid (x, y) \in S^1\}$$

Es sei $\sim$ die von $R$ erzeugte Äquivalenzrelation. ${}^{X}/_{\sim}$ heißt Klein'sche Flasche.

*Beispiel* 10.9 (Projektiver Raum). Es sei $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Es sei

$$\sim := \{(x, y) \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}\ x = \lambda y\}$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. $\mathbb{R}P^n = {}^{X}/_{\sim}$ (der projektive Raum) ist der Raum aller 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$.

## 10.1 Quotienten nach Gruppenoperationen

**Definition 10.10.** Es sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $X$ eine Menge. Eine Abbildung $\cdot\colon G \times X \to X$ heißt *Gruppenoperation*, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\forall x \in X (e \cdot x = x)$

(ii) $\forall f, g \in G((f \circ g) \cdot x = f \cdot (g \cdot x))$

Es sei $x \in X$ fest. Wir schreiben

$$Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

$Gx$ heißt die *Bahn* oder der *Orbit* von $x$. Es sei

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

$G_x$ heißt die *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe* von $x$.
Die Gruppenoperation heißt *transitiv*, falls

$$\forall x, y \in X \; \exists g \in G \; (g \cdot x = y)$$

Äquivalent, falls $\forall x \in X \; Gx = X$

*Bemerkung* 10.11. Aufgrund der Assoziativität schreiben wir einfach

$$fgx := (f \circ g) \cdot x = f \cdot (g \cdot x)$$

**Korollar 10.12.** *1. $G_x$ ist eine Untergruppe von $G$.*

*2. Die Bahnen $Gx$ sind Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation*

$$\sim := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists g \in G \; gx = y\}$$

*3. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

*(a) Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \cdot \colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

*ist eine Gruppenoperation.*

*(b) Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi \colon G &\to Sym(X) := \{f \colon X \to X \mid f \, bijektiv\} \\ g &\longmapsto (x \mapsto gx) \end{aligned}$$

*ist ein Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis:* Es sei $G$ eine Gruppe, $X$ eine Menge, $\cdot$ eine Gruppenoperation. Wir zeigen (1): $e \in G_x$ nach (i) der Gruppenoperationsaxiome. Es seien $g, h \in G_x$. Dann gilt

$$(g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$$

also gilt $(g \circ h) \in G_x$. Behauptung (2) ist klar. Nun zu Behauptung (3):

(a)$\Longrightarrow$(b) :Wir überprüfen, dass $x$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Weil für jedes $x \in X$ die Gleichung $ex = x$ gilt, ist $\varphi(x) = id$. Es sei $x \in X$ beliebig.

$$\begin{aligned} &\varphi(gh)(x) = (g \circ h)(x) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (\varphi(h)(x)) \\ &= \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) \end{aligned}$$

(b)$\Longrightarrow$(a) : Es sei $x \in X$ beliebig. Weil $\varphi(e) = id$, gilt

$$x = id(x) = \varphi(e)(x) = e \cdot x$$

Weiterhin gilt (nach Homomorphismuseigenschaft):

$$(g \circ h) \cdot x = \varphi(gh)(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = \varphi(g) \cdot (\varphi(h) \cdot x)$$

□

**Definition 10.13.** Es sei $G \times X \to X$ eine Gruppenoperation und $A \subseteq X$. Die *Standgruppe* von $A$ ist definiert als

$$G_A := \{g \in G \mid gA = A\}$$

wobei $gA := \{ga \mid a \in A\}$. Dies ist also nicht punktweise gemeint.

**Definition 10.14.** Der *Bahnenraum* von $G$ und $X$ ist

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\}$$

*Beispiele* 10.15.

1. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie und $G := GL(n, \mathbb{R})$ die Gruppe aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $\det(A) \neq 0$ mit der Matrizenmultiplikation. Wir betrachten die Operation von $G$ auf $\mathbb{R}$ durch

   $$(A, r) \longmapsto Ar$$

   Dass dies eine Gruppenoperation ist, folgt aus den Erkenntnissen der linearen Algebra.
   Der $\mathbb{R}^n$ zerfällt unter dieser Operation in zwei Bahnen: $\{0\}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dies folgt aus dem Basiswechselsatz.

2. Es sei $V = \mathbb{R}^n$.

   $$X = G(n, k) = \{\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \mid \exists U$$
   $$(U \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler Unterraum von } V, \bigwedge_{1 \leq i \leq n} v_i \in U)\}$$

   der Raum der $n$-Tupel von Vektoren aus einem $k$-dimensionalen Unterraum $U$ von $\mathbb{R}^n$ und $G = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\}$ mit der

Matrizenmultiplikation. Dies ist die orthogonale Gruppe. Beachten Sie, dass bei der Definition von $X$ auch das $U$ läuft.
Wir betrachten die Operation von $G$ auf $X$ durch

$$(A, V) = (A, \langle v_1, ..., v_n \rangle) \longmapsto \langle Av_1, ..., Av_n \rangle$$

Es sei $A := \mathbb{R}^k \times \prod_{i=k+1}^{n} \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Für $G_A$ gilt

$$G_A = G'_A := \{A \in O(n) \,|\, \exists A_1 \in O(k)\ \exists A_2 \in O(n-k)\ A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\}$$

$G_A \supseteq G'_A$ ist klar. $G_A \subseteq G'_A$ folgt mit ein bisschen linearer Algebra.
Wir behaupten, dass $O(n)$ transitiv auf $X$ operiert. Es sei

$$U = \langle b_1, ..., b_k \rangle,\ V = \langle c_1, ..., c_k \rangle$$

mit $b_i, c_i$ Orthonormalbasen von $U$ resp. $V$. Diese ergänzen wir zu Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$. Die Basiswechselmatrix ist dann orthonormal.

**Lemma 10.16.** *Wenn $G$ transitiv auf $X$ operiert, so ist für jedes $x \in X$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_x = \varphi \colon {}^{G}/_{G_x} &\to X \\ [g] &\longmapsto gx \end{aligned}$$

*wohldefiniert und bijektiv.*

*Beweis:* Zuerst die Wohldefiniertheit. Es sei $g_1 \sim g_2$, d.h. $\exists h \in G_x\ (g_1 h = g_2)$. Dann gilt

$$\varphi(g_2) = g_2 x = g_1 h x = g_1(hx) = g_1 x = \varphi(g_1)$$

Injektivität: Es sei $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Dann ist $g_1 x = \varphi(g_1) = \varphi(g_2) = g_2 x$. Also ist $g_2^{-1} g_1 x = x$ und $g_2^{-1} g_1 \in G_x$. Damit gilt

$$g_1 = g_2(g_2^{-1} g_1) \Longrightarrow g_1 \sim g_2$$

Surjektivität: Es sei $y \in X$. Dank der Transitivität der Operation gibt es ein $g \in G$, sodass $gx = y$. Dann gilt

$$\varphi([g]) = gx = y$$

$\square$

**Definition 10.17.** Es sei $(G, \circ_1)$ eine Gruppe, $\mathscr{O}$ eine Topologie auf $G$. $(G, \circ, \mathscr{O})$ heißt *topologische Gruppe*, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot \colon G \times G &\to G \\ (g, h) &\longmapsto g \circ_1 h^{-1} \end{aligned}$$

stetig ist.

**Lemma 10.18.** *Es sei $(G, \circ_1, \mathscr{O})$ eine topologische Gruppe. Dann sind folgende Abbildungen stetig:*

1. $^{-1} \colon G \to G, x \longmapsto x^{-1}$
2. $\circ_1 \colon G \times G \to G, (a, b) \longmapsto a \circ_1 b$

*Beweis:* Das undekorierte $\circ$ bezeichnet die Hintereinanderausführung.

1. Es gilt $^{-1} = \cdot \circ (1, id)$ und $(1, id)$ ist stetig, da $id$ und $x \longmapsto 1$ stetig sind.
2. Es gilt $\circ_1 = \cdot \circ (id, ^{-1})$ und $(id, ^{-1})$ ist stetig, da $^{-1}$ stetig ist (nach 1).

□

*Bemerkung* 10.19. In einer topologischen Gruppe $(G, \circ_1)$ (mit $gh = g \circ_1 h$) sind die Linksmultiplikation $l_g = (h \mapsto gh)$ und Rechtsmultiplikation $r_g = (h \mapsto hg)$ Homöomorphismen.

*Beweis:* Da $\cdot$ zweistellig aufgefasst stetig ist, ist jede einstellige Version ebenfalls stetig, da

$$l_g = \cdot \circ (g, id) \circ (id, ^{-1})$$

Da $^{-1} = \cdot \circ (1, id)$ stetig ist. Weil $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$, ist die Umkehrabbildung stetig und $l_g$ ist bijektiv, da $G$ eine Gruppe ist. □

**Definition 10.20.** Es sei $G$ eine topologische Gruppe und $H$ eine Untergruppe. Der Quotientenraum $G/H$ mit der Quotiententopologie heißt *homogener Raum*.

Wir fassen $G/H$ auf als $x \sim_H y$, wenn $\exists h \in H, h \circ x = y$.

**Korollar 10.21.** *Die Abbildung $p \colon G \to G/H$ ist stetig und offen.*

*Beweis:* Es sei $U \subseteq G$ offen. Zu zeigen ist, dass $p[U]$ offen in ${}^{G}/_{H}$ ist, d.h. $p^{-1}[p[U]]$ ist offen in $G$. Dies gilt, denn

$$p^{-1}[p[U]] = \bigcup_{h \in H} Uh = \bigcup \{r_h[U] \mid h \in H\}$$

Und für jedes $h \in H$ ist $r_h[U]$ offen (da $r_h$ ein Homöomorphismus ist). $\square$

*Bemerkung* 10.22. Falls $H$ abgeschlossen ist in $G$ und $G$ Hausdorff'sch, so ist $G/H$ Hausdorff'sch. Wenn ${}^{G}/_{H}$ $\mathrm{T}_1$ ist, so ist $H$ abgeschlossen.

*Beweis:* Wir behaupten, dass

$$R = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1^{-1} g_2 \in H\}$$

abgeschlossen ist. Dies sieht man wir folgt: Es ist $x \sim_H y$ gdw $x = xy^{-1}y$ und $xy^{-1} \in H$. Dann ist $R$ abgeschlossen, als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung: $H$ operiert auf $G$ stetig, da $G$ eine topologische Gruppe ist. Da $R$ die Diagonale in $G/H$ ist, ist $G/H$ Hausdorff. Wenn ${}^{G}/_{H}$ $\mathrm{T}_1$ ist, so ist $\{1\}$ abgeschlossen und somit auch $p^{-1}[\{1\}] = H$. $\square$

# Kapitel 11

# Homotopie

Von nun an seien alle Abbildungen stetig. Wenn wir also $\gamma\colon I \to X$ schreiben, ist damit gemeint, dass $I = [0,1]$ mit der Standardtopologie von $\mathbb{R}$ ausgestattet ist und $X$ eine Topologie trägt und $\gamma$ bezüglich dieser beiden Topologien stetig ist.

**Definition 11.1.** Es seien $X, Y$ topologische Räume, $f, g\colon X \to Y$ stetig. $f$ heißt *homotop* zu $g$ mittels/durch/via $h$ genau dann, wenn $h\colon X \times [0,1] \to Y$ stetig ist und

$$\forall x \in X \; h(x,0) = f(x) \wedge h(x,1) = g(x)$$

Man schreibt kurz $f \sim_h g$. $f \sim g$ heißt $\exists h \; f \sim_h g$.

**Definition 11.2.** $f \sim_{h,A} g$, genannt, $f$ und $g$ sind *homotop relativ zu* $A$ via $h$, man schreibt $f \sim_{\mathrm{rel}A} g$ oder $f \sim_{h,\mathrm{rel}A} g$, wenn $f \restriction A = g \restriction A$ sowie $f \sim_h g$ und $\forall t \in I \; h_t \restriction A = f \restriction A = g \restriction A$. Hier ist $h_t(x) = h(x,t)$. Man sagt statt homotop auch homotopieäquivalent.

*Beispiel* 11.3. Es sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to X$ gegeben durch $\gamma_1(t) = exp(\pi i t), \gamma_2(t) = exp(-\pi i t)$. Ist $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2$? Wir haben ja den Nullpunkt herausgenommen. Mit Überlagerungen werden wir zu Ende des Kapitels einen Beweis führen.

**Satz 11.4.** *Die Homotopie (relativ zu einer Menge A) ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von $X$ nach $Y$.*

*Beweis:* Reflexiv: Es sei $h(x,t) = f(x)$.
Symmetrisch: Es sei $h$ stetig, sodass $h(x,0) = f(x), h(x,1) = g(x)$. Weil die

Abbildung $\varphi\colon t \mapsto 1-t$ stetig ist, ist $h' = h \circ (id, \varphi)$ stetig.
Transitiv: Es sei $f \sim_{h_1} g, g \sim_{h_2} h$. Es sei

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(x, 2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert, da $h_1(x,1) = g(x) = h_2(x,0)$. Weiterhin ist $h$ stetig, da $h \restriction X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ und $h \restriction X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ stetig sind (nach Satz 2.8) □

**Lemma 11.5.** *Es seien $f_0, f_1\colon X \to Y$ sowie $g_0, g_1\colon Y \to Z$ und sei $f_0 \sim_{h_0} f_1, g_0 \sim_{h_1} g_1$. Dann ist $g_0 \circ f_0 \sim_H g_1 \circ f_1$, wobei*

$$H(x,t) = h_1(h_0(x,t), t)$$

*Beweis:* Zuerst ist $H\colon X \times I \to Z$ als Einsetzung stetiger Funktionen in eine stetige Funktion stetig. Weiterhin gilt

$$H(x,0) = h_1(h_0(x,0),0) = h_1(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x)$$

$$H(x,1) = h_1(h_0(x,1),1) = h_1(f_1(x),1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$$

□

*Beispiel* 11.6. Es sei $g\colon \mathbb{R}^n \to \{0\}$, $f = id\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $f \sim_h g$ mit

$$h\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n,\ h(x,t) = x - tx$$

Denn $h$ ist stetig laut der Analysis und $h(x,0) = x = f(x), h(x,1) = x - x = 0 = g(x)$.

Nun lässt sich aus der Homotopieäquivalenz zwischen Funktionen auch eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen Räumen definieren.

**Definition 11.7.**

1. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass

   $$g \circ f \sim id_X \wedge f \circ g \sim id_Y.$$

   Man sagt, $g$ bezeugt, dass $f$ eine Homotopieäquivalenz ist.

2. Zwei topologische Räume $X, Y$ heißen *homotopieäquivalent*, wenn es eine Homotopieäquivalenz $f$ (oder gar als $(f, g)$ geschrieben, mit einem Zeugen $g$) gibt. Wir schreiben $X \simeq Y$, $X \simeq_f Y$ oder auch $X \simeq_{f,g} Y$.

3. Ein topologischer Raum $X$ heißt *zusammenziehbar*, wenn $X$ zum Einpunktraum homotopieäquivalent ist.

*Bemerkung* 11.8. Die Homotopieäquivalenz ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation:

1. $X \simeq X$ durch $f = id$.

2. Falls $X \simeq Y$ via $(f, g)$, so ist $Y \simeq X$ durch $(g, f)$.

3. Es sei $X \simeq Y$ durch $f_0$ (bezeugt von $f_1$) und $Y \simeq Z$ durch $g_0$ (bezeugt durch $g_1$). So ist $X \simeq Z$ durch $g_0 \circ f_0$ (bezeugt von $f_1 \circ g_1$):

   $$(g_0 \circ f_0) \circ (f_1 \circ g_1) = g_0 \circ (f_0 \circ f_1) \circ g_1 \sim g_0 \circ id_Y \circ g_1 = g_0 \circ g_1 \sim id_Z$$

   Die andere Richtung folgt genau so.

*Bemerkung* 11.9. Wenn $X$ und $Y$ homöomorph sind, so sind sie homotopieäquivalent:
Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, offen und bijektiv. Dann sind $X$ und $Y$ homotopieäquivalent durch $f$, bezeugt von $f^{-1}$.

*Bemerkung* 11.10. Kompaktheit und topologische Dimension sind nicht invariant unter Homotopieäquivalenz.

**Lemma 11.11.** *$X$ ist zusammenziehbar genau dann, wenn es eine Abbildung $h\colon X \times I \to X$ und ein $x_0 \in X$ gibt, sodass*

$$\forall x \in X \; h(x, 0) = x, h(x, 1) = x_0.$$

*Beweis:* Es sei $X$ zusammenziehbar zu $Y = \{0\}$ und sei $X \simeq_{f,g} Y$. Also gibt es $f\colon X \to \{0\}, g\colon \{0\} \to X$, sodass $gf \sim id_X$ und $fg \sim \mathrm{id}_{\{0\}}$. Es sei $x_0 = g(0)$. Dann gilt $gf(x) = x_0$ für jedes $x$. Nach Homotopie von $gf$ und $\mathrm{id}_X$ gibt es $h\colon X \times I \to X$, sodass

$$\forall x \in X \; h(x, 0) = \mathrm{id}_X(x) = x, \; h(x, 1) = gf(x) = x_0.$$

Also erfüllt $X$ die andere Bedingung.
Es sei $h\colon X \times I \to X$ und $x_0 \in X$, sodass

$$\forall x \in X \; h(x, 0) = x, \; h(x, 1) = x_0$$

Dann ist $X$ homotopieäquivalent zu $Y = \{0\}$: Es sei $f(x) = 0$ für $x \in X$ und es sei $g(0) = x_0$. $f\colon X \to \{0\}$ und $g\colon \{0\} \to X$ sind stetig, weiterhin gilt

$$h(x,0) = x = \mathrm{id}_X(x), \quad h(x,1) = 0 = gf(x).$$

Also ist $\mathrm{id}_X \sim_h gf(x)$. Weiterhin ist $fg(0) = 0$ und damit $fg = \mathrm{id}_{\{0\}}$ und gleiche Funktionen sind homotop. □

**Definition 11.12.** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es $x_0 \in X$ gibt, sodass

$$\forall x \in X \forall t \in I \ (1-t)x_0 + tx \in X$$

*Bemerkung* 11.13. Ist $X$ sternförmig, so ist $X$ zusammenziehbar.

**Lemma 11.14.** *Es sei $X$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Dann gilt: Existiert ein $h\colon X \times I \to X$, sodass*

$$\forall x \in X \ (h(x,0) = x \wedge h(x,1) \in A \wedge (x \in A \to h(x,1) = x)),$$

*so sind $A$ und $X$ homotopieäquivalent.*

*Beweis:* Es sei $h$ wie im Lemma. Es sei $f\colon X \to A$ definiert durch $f(x) = h(x,1)$ und $g\colon A \to X$ die Inklusion. Wir behaupten, dass $gf \sim \mathrm{id}_X$ und $fg \sim \mathrm{id}_A$. Weil $h_1|_A = \mathrm{id}_A$, ist $f|_A = \mathrm{id}_A$ und somit $fg = \mathrm{id}_A$. Weiterhin ist $gf \sim \mathrm{id}_X$ durch $h$, denn

$$\forall x \in X \ h(x,0) = x \wedge gf(x) = g(f(x)) = g(h(x,1)) = h(x,1).$$

□

*Beispiele* 11.15.

1. $Z := S^1 \times \mathbb{R}$ ist homotopieäquivalent zu $S^1$, denn $S^1 \cong S^1 \times \{0\}$ und $h\colon Z \times I \to Z$, definiert durch

$$h(x,y,t) = (x, y - ty)$$

erfüllt die Bedingung des Lemmas.

2. $S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert durch

$$h(x,t) = t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)x.$$

Dann erfüllt $h$ die Bedingung des Lemmas.

## 11.1 Die Fundamentalgruppe

Ein Weg $\gamma\colon I \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt Schleife.

**Definition 11.16** (und Behauptung)**.** Es sei $X$ ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\Omega(X, x_0) := \{\gamma\colon I \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Dies ist die Menge der $x_0$-Schleifen. Die *Fundamentalgruppe* von $(X, x_0)$ hat als Trägermenge:

$$\pi_1(X, x_0) = {}^{\Omega(X,x_0)}/_{\sim_{rel(\{0,1\})}}.$$

Die Verknüpfung der Gruppe ist

$$[f] * [g] = [f * g]$$

mit

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ g(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das neutrale Element ist $\epsilon_{x_0} := (x \mapsto x_0)$. Der Punkt $x_0$ heißt Basispunkt. Man schreibt statt $(\pi_1(X, x_0), *, \epsilon_{x_0})$ oft nur die Trägermenge $\pi_1(X, x_0)$.

Für den Beweis, dass $(\pi_1(X, x_0), *, \epsilon_{x_0})$ eine Gruppe ist, benötigen wir:

**Lemma 11.17.** *Es sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schleife und $\varphi\colon I \to I$ stetig, sodass $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. Dann sind $\gamma \circ \varphi$ und $\gamma$ $\{0,1\}$-homotop.*

*Beweis:* Es sei $H$ definiert durch

$$H(t, s) = \gamma((1-s)t + s\varphi(t))$$

Dann ist $H$ eine Homotopie von $\gamma$ und $\gamma \circ \varphi$: $H$ ist stetig laut der Analysis und

$$H(t, 0) = \gamma(t),\ H(t, 1) = \gamma(\varphi(t));$$

weiterhin ist

$$H(0, s) = \gamma(0 + 0) = \gamma(0),\ H(1, s) = \gamma(1 - s + s) = \gamma(1).$$

□

**Lemma 11.18.** *Es sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ und $\overline{\gamma}\colon I \to X$ definiert durch $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Dann ist $\gamma * \overline{\gamma}$ $\{0,1\}$-homotop zur konstanten $x_0$-Abbildung.*

*Beweis:* Es sei

$$H(t,s) := \begin{cases} \gamma(2ts) & t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{\gamma}(2ts+1-2s) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn

$$H\left(\frac{1}{2}, s\right) = \gamma(s) = \gamma(1-1+s) = \overline{\gamma}(1-s) = \overline{\gamma}(s+1-2s) = H\left(\frac{1}{2}, s\right)$$

Weiterhin ist sie eine $\{0,1\}$-Homotopie, denn

$$H(t,0) = \left\{\begin{matrix} \gamma(0) = \gamma * \overline{\gamma}(0) & t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{\gamma}(1) = \gamma(0) = \gamma * \overline{\gamma}(0) & t \geq \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \quad ,$$

$$H(t,1) = \left\{\begin{matrix} \gamma(2t) \\ \overline{\gamma}(2t+1-2) = \overline{\gamma}(2t-1) \end{matrix}\right\} \quad = \gamma * \overline{\gamma}(t)$$

$$H(0,s) = \gamma(0),\ H(1,s) = \overline{\gamma}(2 \cdot 1 \cdot s + 1 - 2s) = \overline{\gamma}(1) = \gamma(0) = x_0.$$

□

**Lemma 11.19.** *Die Verknüpfung $[f] * [g]$ definiert wirklich eine Gruppenoperation.*

*Beweis:*

1. $f*g$ wie in der Definition ist ein Weg, denn $f*g \restriction [0, \frac{1}{2}]$ sowie $f*g \restriction [\frac{1}{2}, 1]$ ist stetig, also ist auch $f * g$ stetig. Weiterhin gilt

$$f * g(0) = f(0) = x_0, f * g(1) = g(1) = x_0.$$

2. Die Äquivalenzklasse von $f * g$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten: Es sei $f_0 \sim_{\{0,1\},H_1} f_1, g_0 \sim_{\{0,1\},H_2} g_1$. Wir behaupten, dass

$$H(t,s) = \begin{cases} H_1(2t,s) & \text{für } t \leq \frac{1}{2}; \\ H_2(2t-1,s) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine $\{0,1\}$-Homotopie von $f_0 * g_0$ und $f_1 * g_1$ ist, denn

$$H(t,0) = \left\{\begin{matrix} H_1(2t,0) = f_0(2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2}; \\ H_2(2t-1,0) = g_0(2t-1) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \quad = f_0 * g_0(t).$$

Ebenso für $s = 1$, also ist $H$ eine $\{0,1\}$-Homotopie. Ebenfalls gilt

$$H(0,s) = H_1(0,s) = f_0(0) = (f_0 * g_0)(0);$$

$$H(1,s) = H_2(1,s) = g_0(0) = (f_0 * g_0)(0),$$

also ist $H$ eine $\{0,1\}$-Homotopie.

3. Es sei $f$ eine Schleife und $g$ die konstante $x_0$-Abbildung. Die $\{0,1\}$-Homotopie von $g * f$ und $f$ folgt aus Lemma 11.18. Da die Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x - 1, & \text{für } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

die Bedingungen des Lemmas erfüllt und $g * f = f \circ \varphi$, sind $g * f$ und $f$ $\{0,1\}$-homotop.

4. Es sei $f \colon I \to X$ eine Schleife. Wir behaupten, dass

$$\overline{f}(x) := f(1-x)$$

invers zu $f$ ist. Dies folgt aus Lemma 11.18

5. Assoziativität: Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Schleifen. Zu zeigen ist, dass $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ und $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ $\{0,1\}$-homotop sind. Dies folgt, denn es gilt

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 = \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \ \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & t \geq \frac{3}{4} \end{cases},$$

und eine $\{0,1\}$-Homotopie ist gegeben durch

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{für } 0 \leq 4t \leq 1+s, \\ \gamma_2(4t-(1+s)) & \text{für } s+1 \leq 4t \leq s+2, \\ \gamma_3(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}) & \text{für } 1 \geq 4t \geq s+2, \end{cases}$$

denn

$$H(t,0) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \ H(t,1) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & t \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Und weiterhin gilt

$$H(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(0) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3(0)$$
$$H(1,s) = \gamma_3(1) = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(1) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3(1)$$

□

*Bemerkung* 11.20. Wie findet man eine solche vermittelnde $\{0,1\}$-Homotopie $H$? Es sei $\psi := (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ und es sei $\chi = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$. Wie suchen ein stetiges $\varphi\colon I \to I$, sodass $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ und für alle $t \in I$,

$$\psi(t) = \chi(\varphi(t)).$$

Dann können wir mit Lemma 11.17 ein $H$ herstellen mit $\psi \sim_H \chi$. Wir definieren

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ t + \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}, & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

*Bemerkung* 11.21. Wir können $\Omega(X, x_0)$ erneut topologisieren durch die kompakt-offene Topologie.

## 11.2 Die Fundamentalgruppe als Funktor

**Definition 11.22.** Eine *Kategorie* $\mathscr{C}$ besteht aus

1. eine Klasse von Objekten $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,
2. zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ von Morphismen,
3. Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ einer Verkettung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z) &\to \mathrm{Hom}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

sodass folgendes gilt:

Identität: Zu jedem $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ gibt es einen ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$, sodass für alle $Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$:

$$f = f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f$$

Assoziativität: Für $X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, W)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

*Beispiele* 11.23.

1. Die Kategorie $\mathcal{T}op$ mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen.
2. Die Kategorie $\mathcal{T}op+$ der Topologischen Räume mit Basispunkt als Objekten und stetigen Abbildungen, die die jeweiligen Basispunkte aufeinander abbilden als Morphismen. Wir schreiben $(X, x)$ für einen topologischen Raum mit Basispunkt $x$.
3. Die Kategorie *Grp* der Gruppen als Objekten und Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

**Definition 11.24.** Es seien $\mathcal{A}$ und $(B)$ Kategorien. Eine Abbildung $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein *kovarianter Funktor*, falls $\mathcal{F}(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ für jedes $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ und

1. für $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$
2. für jedes $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ und jedes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ gilt $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$
3. für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

**Satz 11.25.** *Die Abbildung $\pi_1$, die einem topologischen Raum mit Basispunkt seine Fundamentalgruppe zuordnet, ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{T}op+$ nach Grp.*

*Beweis:* Da $\pi_1(X, x)$ eine Gruppe ist, ist die erste Eigenschaft erfüllt.
Wir definieren nun die Abbildung $\pi_1$ auch auf $\{f \colon X \to Y : f(x) = y\}$. Wir schreiben hierfür $f \colon (X, x) \to (Y, y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_1(f) =: f^* \colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(Y, y) \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus:

$$f^*[\gamma * \gamma'] = [f \circ (\gamma * \gamma')] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \gamma')]$$

Denn beide Abbildungen stimmen auf $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ und $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ überein.
Weiterhin gilt:

1. $\mathrm{id}_X^*(\gamma) = [\mathrm{id}_X \circ \gamma] = [\gamma]$. Also gilt $\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{\pi(X,x)}$.

2. Es seien $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}((X,x),(Y,y)), f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}((Y,y),(Z,z))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi_1(f) \circ \pi_1(g)[\gamma] =& (f^* \circ g^*)[\gamma] = f^*([g \circ \gamma]) \\ &= [f \circ g \circ \gamma] = (f \circ g)^*([\gamma]) = \pi_1(f \circ g)[\gamma].\end{aligned}$$

□

### 11.2.1 Die Rolle des Basispunktes

Nun lassen wir in einem topologischen Raum $X$ den Basispunkt variieren und vergleichen $\pi_1(X,x)$ mit $\pi_1(X,y)$.

**Satz 11.26** (Die Rolle des Basispunktes)**.** *Es sei $X$ ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von $x$ nach $y$ induziert einen Isomorphismus*

$$\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y).$$

*Beweis:* Es sei $\delta\colon [0,1] \to X$ ein stetiger Weg mit $\delta(0) = y, \delta(1) = x$. Wir definieren

$$\begin{aligned}J_\delta\colon \pi_1(X,x) &\to \pi_1(X,y) \\ [\gamma] &\longmapsto [\overline{\delta} * \gamma * \delta],\end{aligned}$$

wobei $\overline{\delta}(x) = \delta(1-x)$.

1. $J_\delta$ ist wohldefiniert, da Homotopie durch $*$ erhalten bleibt (wie im Beweis der Wohldefiniertheit von $*$ für Schleifen).

2. $J_\delta$ ist ein Gruppenhomomorphismus, da

$$[\gamma_1 * \gamma_2] \longmapsto [\overline{\delta} * \gamma_1 * \gamma_2 * \delta] = [\overline{\delta} * \gamma_1 * \delta * \overline{\delta} * \gamma_2 * \delta] = [\overline{\delta} * \gamma_1 * \delta] * [\overline{\delta} * \gamma_2 * \delta]$$

3. $J_\delta$ ist bijektiv, da die Umkehrabbildung durch $J_{\overline{\delta}}$ gegeben ist:

$$J_\delta(J_{\overline{\delta}})(\gamma) = [\overline{\delta} * \delta * \gamma * \overline{\delta} * \delta] = [\gamma],$$

$$J_{\overline{\delta}}(J_\delta(\gamma)) = [\delta * \overline{\delta} * \gamma * \delta * \overline{\delta}] = [\gamma].$$

□

**Korollar 11.27.** *Wenn $X$ wegzusammenhängend ist, hängt der Isomorphietyp von $\pi_1(X, x)$ nicht von der Wahl von $x$ ab.*

**Definition 11.28.** Es seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to X$ Schleifen (u.U. mit verschiedenen Basispunkten). $\gamma_0$ und $\gamma_1$ heißen *geschlossen homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $h \colon I \times I \to X$ gibt, sodass

$$h(s, 0) := h_0(s) = \gamma_0(s), h(s, 1) := h_1(s) = \gamma_1(s)$$

und die Abbildung von $I$ nach $X$, $s \mapsto h(s, t)$ auch $h_t$ genannt, eine Schleife ist für alle $t \in I$.

*Bemerkung* 11.29. Falls $\gamma_1, \gamma_2$ Schleifen sind und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, so gilt

$$\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2 \Longrightarrow \gamma_1 \text{ ist geschlossen homotop zu } \gamma_2$$

**Definition 11.30.** Eine Schleife heißt zusammenziehbar in $X$, falls es ein $x \in X$ und eine geschlossene Homotopie $h$ gibt, sodass $\gamma \sim_h \epsilon_x$.

**Lemma 11.31.** *Eine Schleife $\gamma$ ist genau dann zusammenziehbar in $X$, falls $\gamma \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{\gamma(0)}$.*

*Beweis:* Die Rückwärtsrichtung ist gerade die Bemerkung von eben: Es sei $\gamma \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{\gamma(0)}$ durch $h$. Dann gilt per Definition $h_0 = \gamma, h_1 = \epsilon_{\gamma(0)}$. Weiterhin ist $h(0, t) = \gamma(0), h(1, t) = \gamma(1) = \gamma(0)$. Alle $h_t$ sind also Schleifen.

Es sei $h$ eine geschlossene Homotopie von $\gamma$ und $\epsilon_{x_0}$ für $x_0 \in X$. $\pi(s) = h(0, s)$ ist ein Weg von $x_0$ nach $x = \gamma(0)$. Für $t \in [0, 1]$ sei $\sigma_t(s) = h(0, t \cdot s)$. Damit ist $\sigma \colon I \times I \to X, \sigma(s, t) := \sigma_t(s) = h(0, st)$ stetig. $k : I \times I \to X$ sei definiert durch

$$k_t = (\sigma_t * h_t) * \overline{\sigma_t}$$

$$k(s, t) = \begin{cases} h(0, 4st) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ h(4s - 1, t) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(0, t(2 - 2s)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt folgendes: $k(0, t) = \gamma(t)$. $k(1, t) = \gamma(0)$. $k(s, 0) = h(0, 0) = \gamma(0)$, $k(s, 1) = h(0, 2 - 2s) = \gamma(0)$.

1. $k_0(s) = \gamma(s)$

2. $k_1 \sim \pi * \overline{\pi}$
3. $\gamma \sim_k \pi * \overline{\pi} \sim \epsilon_{x_0}$
4. $\epsilon_{x_0} \sim_{k,\{0,1\}} \gamma$.

$\square$

**Satz 11.32.** *Es sei $\gamma\colon I \to X$ eine Schleife und sei $\tilde{\gamma}\colon {}^{I}/_{\{0,1\}} \to X$ die induzierte Abbildung. ${}^{I}/_{\{0,1\}} \cong S^1$ trage die Quotiententopologie und sei $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}, \overline{B^2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. Dann ist $\gamma$ zusammenziehbar genau dann, wenn $\tilde{\gamma}\colon S^1 \to X$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{B^2}$ hat, d.h.*

$$\exists f\colon \overline{B^2} \to X, f \restriction S^1 = \tilde{\gamma}$$

*Beweis:* Es sei $f\colon \overline{B^2} \to X$ stetig und sei $f \supseteq \tilde{\gamma}$. Wir definieren $H(x,t) = f(t \cdot [x])$ für $x \in [0,1]$, $[x] \in {}^{[0,1]}/_{\{0,1\}}$, $t \in [0,1]$. Da die Multiplikation stetig ist, ist $H$ stetig. Weiterhin ist $H_0 = \epsilon_{f(0)}$ und $H_1 = f$. Für jedes $t \in I$ ist $H(0,t) = H(1,t)$, da $\gamma(0) = \gamma(1)$. Also ist $\gamma$ zusammenziehbar.

Für die umgekehrte Richtung sei $\tilde{\gamma} \sim_{H,\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$ und es sei $H_0 = \tilde{\gamma}, H_1 = \tilde{\epsilon_{x_0}}$. Für $y \in \overline{B^2}$ gilt $y = sx$ eindeutig mit $x \in S^1, s \in I$. Wir setzen

$$f(sx) = H(x, 1-s).$$

Dann gilt für $x \in S^1$, dass $f(x) = H(x, 1-1) = \tilde{\gamma}(x)$. $\square$

Man schreibt für $f^*$, das auf $\pi_1(X, x_0)$ wirkt, auch $f^*_{x_0}$. Also $f^*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ für $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ und $[\gamma] = [\gamma]_{\sim_{\{0,1\}}}$.

**Satz 11.33.** *Es seien $f, g\colon X \to Y, h\colon X \times I \to Y$, sodass $f \sim_h g$. Es sei $x_0 \in X, \gamma(t) := h(x_0, t)$, dann ist $\gamma\colon I \to Y$, sodass $\gamma(0) = f(x_0), \gamma(1) = g(x_0)$. Dann ist:*

$$g^*_{x_0} = J_\gamma \circ f^*_{x_0}$$

*Mit anderen Worten: Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "f^*_{x_0}"] \arrow[dr, "g^*_{x_0}"'] & & \pi_1(Y, y_0) \arrow[dl, "J_\gamma"] \\
& \pi_1(Y, y_1) &
\end{tikzcd}$$

*kommutiert.*

*Beweis:* Es sei $\sigma \in \Omega(X, x_0) = \{\gamma \in C(I, X) \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$. Wir behaupten, dass

$$g^*([\sigma]) := [g \circ \sigma] = (J_\gamma \circ f^*)([\sigma]) = [\overline{\gamma} * (f \circ \sigma) * \gamma]$$

Wir basteln uns die Homotopie $k$.

$$\gamma_t(s) := \gamma(t + s(1-t))$$

$$k_t := \overline{\gamma_t} * (h_t \circ \sigma) * \gamma_t$$

Dann ist $k\colon X \times I \to Y$ stetig und $k_1 = g \circ \sigma, k_0 = \overline{\gamma} * (f \circ \sigma) * \gamma$. □

**Lemma 11.34.** *Es sei $\gamma\colon I \to X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1, f\colon X \to Y$. Dann gilt:*

$$f^*_{x_1} \circ J_\gamma = J_{f \circ \gamma} \circ f^*_{x_0}$$

*Beweis:* Es sei $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*_{x_1} \circ J_\gamma([\sigma]) &= f^*_{x_1}([\overline{\gamma} * \sigma * \gamma]) \\ &= [f \circ (\overline{\gamma} * \sigma * \gamma)] \\ &= [(f \circ \overline{\gamma}) * (f \circ \sigma) * (f \circ \gamma)] \\ &= [(\overline{f \circ \gamma}) * (f \circ \sigma) * (f \circ \gamma)] \\ &= J_{f \circ \gamma}([f \circ \sigma]) \\ &= J_{f \circ \gamma} \circ f^*_{x_0}([\sigma]). \end{aligned}$$

□

**Satz 11.35.** *Es sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann gilt für alle $x_0 \in X$, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} f^*_{x_0} : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] &\longmapsto [\gamma \circ f] \end{aligned}$$

*ein Gruppenisomorphismus ist.*

*Beweis:* Es sei $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g \sim_k \mathrm{id}_Y, g \circ f \sim_h \mathrm{id}_X$. Dann ist $\gamma_0(t) = k(f(x_0)), 1-t)$ ein Weg von $f(g(f(x_0)))$ nach $f(x_0)$. Weiterhin ist $\gamma_1(t) = h(x_0, 1-t)$ ein Weg von $x_0$ nach $g(f(x_0))$.
Die Abbildung ist ein Homomorphismus, denn $f \circ \epsilon_{x_0} = \epsilon_{f(x_0)}$. Weiterhin gilt

$$f^*_{x_0}([\gamma * \gamma']) = [f \circ (\gamma * \gamma')] = [f \circ \gamma * f \circ \gamma'] = f^*_{x_0}([\gamma]) * f^*_{x_0}([\gamma']).$$

Die Abbildung ist injektiv, da $(g \circ f)^*_{x_0} = g^*_{f(x_0)} f^*_{x_0} = J_{\gamma_1}$ und letzte Abbildung bijektiv ist. Die Abbildung ist surjektiv, da $(f \circ g)^*_{f(x_0)} = f^*_{g(f(x_0))} \circ g^*_{f(x_0)} = J_{\gamma_0}$ und letzte Abbildung surjektiv ist. In Diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "(g\circ f)^*_{x_0}"] \arrow[dr, "id^*_{x_0}"'] & & \pi_1(X, g(f(x_0))) \arrow[dl, "J_{\gamma_1}"] \\
& \pi_1(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[rr, "(f\circ g)^*_{f(x_0)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}^*_{f(x_0)}"'] & & \pi_1(Y, (f \circ g)(f(x_0)) \arrow[dl, "J_{\gamma_0}"] \\
& \pi_1(Y, y_0) &
\end{tikzcd}$$

□

Jeder zusammenziehbare Raum hat also die einelementige Fundamentalgruppe.

## 11.3 Lokale Produkte und Überlagerungen

**Definition 11.36.** Es sei $\pi\colon Y \to X$ stetig. $\pi$ heißt lokales Produkt/lokale Faserung, wenn

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X \exists U \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{O}\ \exists F_U \neq \emptyset \text{ top. Raum} \\
&\qquad \exists h_U\colon \pi^{-1}[U] \xrightarrow{\cong} U \times F_U\ (p_1 \circ h_U = \pi \restriction \pi^{-1}[U]).
\end{aligned}$$

Es sei $\pi\colon Y \to X$ stetig. $\pi$ heißt lokale Überlagerung, wenn

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X \exists U \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{O}\ \exists F_U \neq \emptyset \text{ diskr. top. Raum} \\
&\qquad \exists h_U\colon \pi^{-1}[U] \xrightarrow{\cong} U \times F_U\ (p_1 \circ h_U = \pi \restriction \pi^{-1}[U]).
\end{aligned}$$

Das heißt: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \supseteq \pi^{-1}[U] \arrow[rr, "h_U, \cong"] \arrow[dr, "\pi\restriction\pi^{-1}[U]"'] & & U \times F_U \arrow[dl, "p_1"] \\
& U \subseteq X &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.
$F_x := \pi^{-1}[\{x\}] \subseteq Y$ heißt Faser von $\pi$ über $x$.

**Definition 11.37.** Ein lokales Produkt heißt globales (oder triviales) Produkt, wenn ein einziges $F, h$ und somit stets $U = X$ gewählt werden kann.

*Bemerkung* 11.38. $h_U \restriction F_x$ ist ein Homömorphismus $F_x \cong \{x\} \times F_U$.

**Lemma 11.39.** *Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt und $X$ zusammenhängend. Dann sind je zwei Fasern von $\pi$ homöomorph.*

*Beweis:* Es sei $x_0 \in X, V_0 = \{x \in X \mid F_x \cong F_{x_0}\}$ sowie $V_1 = X \setminus V_0$. $V_0$ ist offen, da $\pi$ ein lokales Produkt ist, da jede Umgebung von $x$, die wie im lokalen Produkt ist, für alle $x' \in U$ $F_{x'} \cong F_x$ erfüllt und somit $F_x \cong F_{x_0}$ gilt. Es gilt, dass

$$V_1 = \bigcup_{y \in X : F_y \ncong F_{x_0}} \{x \in X \mid F_x \cong F_y\}$$

Da jedes $\{x \in X \mid F_x \cong F_y\}$ offen ist, ist $V_1$ offen. Da $X$ zusammenhängend ist und $x_0 \in V_0$, ist $V_1 = \emptyset$. $\square$

*Beispiele* 11.40.

1. $\pi = p_1\colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ ist offensichtlich ein globales Produkt, da $h = \mathrm{id}$ gewählt werden kann.

2. Es sei $M = {}^{[0,1] \times [0,1]}/_{\sim}$ mit $(0,x) \sim (1, 1-x)$ das Möbiusband und

$$\begin{aligned} \pi\colon M &\to S^1 \\ [x,y] &\longmapsto {}^{[x]}/_{\{0,1\}} \end{aligned}$$

   $\pi$ ist ein lokales, aber kein globales Produkt.

$$\pi^{-1}[{}^{[x]}/_{\{0,1\}}] = \{[x,y] \mid y \in [0,1]\}$$

   Jede Faser ist also homöomorph zu $[0,1]$. "$\pi$ ist global" hieße, dass

$$M \cong S^1 \times [0,1],$$

   in diesem Falle wäre das Möbiusband also nicht verdreht.

3. $\pi\colon O(n) \to {}^{O(n)}/_{O(k) \times O(n-k)} \cong G(n,k)$ ist ein lokales Produkt mit Faser $O(k) \times O(n-k)$.

4. $\pi\colon S^3 \to {}^{S^3}/_{\sim} \cong S^2$, mit $v \sim w :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in S^1 : v = \lambda w$ ist ein lokales Produkt mit Faser $S^1$, aber nicht global, da in diesem Fall $S^3 \cong S^2 \times S^1$ wäre. Dies geht aber nicht, denn

$$\pi_1(S^3) = \{e\},\ \pi_1(S^2 \times S^1) = \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^1) = \{e\} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

5. Es sei $Y = TS^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in S^2, \langle x, y\rangle = 0\}$. Es sei $\pi\colon Y \to S^2$ definiert durch $\pi(x, y) = x$. Dann ist $\pi$ ein lokales Produkt mit Faser $\mathbb{R}^2$ und ist nicht global nach dem Satz vom Igel.

**Lemma 11.41.** *Es sei $\pi\colon Y \to X$ stetig. Dann sind äquivalent:*

1. *$\pi$ ist eine lokale Überlagerung.*
2. *Für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $U$ von $x$ sowie $I$ nicht leer, sodass es für alle $i \in I$ eine offene Menge $V_i$ gibt mit*
   (a) $\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} V_i$
   (b) *Für $i \neq j \in I$ ist $V_i \cap V_j = \emptyset$*
   (c) $\forall i \in I \pi \restriction V_i\colon V_i \cong U$

   *In Formel:*

$$\forall x \in X\ \exists U \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{O}\ \exists I \neq \emptyset\ \forall i, j \in I \exists V_i \in \mathscr{O}\ (\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} V_i \wedge (i \neq j \to V_i \cap V_j = \emptyset) \wedge \pi \restriction V_i\colon V_i \xrightarrow{\cong} U).$$

*Beweis:* Es gilt $\pi \restriction V_i = p_1 \restriction (U \times \{i\}) \circ h \restriction V_i$. Wenn jetzt $U$ wie in (1) zu $x$ gewählt ist, so ist $V_i := h^{-1}[U \times \{i\}]$ offen. □

**Definition 11.42.** Es sei $X$ zusammenhängend und $\pi\colon Y \to X$ eine lokale Überlagerung, s.d. f.a. $U$ $F_U \cong I, I$ diskret. $|I|$ heißt die Blätterzahl der Überlagerung.

*Beispiele* 11.43.

1. Es sei $\pi = \exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\pi$ ist natürlich surjektiv. Weil für $y = x + 2i\pi$ gilt, dass $\exp(y) = \exp(x)$, hat $\pi$ $\mathbb{Z}$-viele Blätter.
2. Es sei $\pi\colon \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$ definiert durch $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$. Hier ist die Blätterzahl wieder unendlich.

3. Es sei $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $h(t) = e^{2\pi i t}$. Erneut ist die Blätterzahl unendlich.

4. $G = \{-id, id\}$ wirke auf $S^n$. Dann gilt ${}^{S^n}/_{\pm\, id} \cong \mathbb{R}P^n$. Es sei $\pi$ die Projektion. Dann gilt $\pi(x) = x, -x$, also hat $\pi$ zwei Blätter.

5. Es sei $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\pi_z\colon S^1 \to S^1$ definiert durch $\pi_z(x) = x^{2\pi i z}$. Dies ist eine Überlagerung mit Blätterzahl $\mathbb{Z}$.

**Definition 11.44.** Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt und sei $f\colon Z \to X$ stetig. Eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon Z \to Y$ heißt Hochhebung oder Lift von $f$ nach $Y$, wenn $\pi \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & Y \supseteq \pi^{-1}[U] \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "\pi"] & U \times F_U \arrow[dl, "p_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

**Proposition 11.45.** *Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt. Es sei $f\colon Z \to X$ und zu $f$ existiere ein Lift $\tilde{f}\colon Z \to Y$. Dann gilt:*

$$\forall z_0 \in Z\ \exists y_0 \in Y\ (\tilde{f}(z_0) = y_0, f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y, y_0)))$$

*Beweis:* Zuerst gilt $\pi \circ \tilde{f} = f$. Damit gilt auch $f_* = (\pi \circ \tilde{f})_* = \pi_* \circ \tilde{f}_*$, da $f_* = \pi_1(f)$ und $\pi_1$ ein kovarianter Funktor ist. Nun folgt:

$$f_*[\pi_1(Z, z_0)] = (\pi_* \circ \tilde{f}_*)[\pi_1(Z, z_0)] = \pi_*[\underbrace{\tilde{f}_*[\pi_1(Z, z_0)]}_{\subseteq \pi_1(Y, y_0)}] \subseteq \pi_*[\pi_1(Y, y_0)]$$

□

Wir zeigen nun, dass sich Wege stets hochheben lassen:

**Satz 11.46.** *Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt, $\gamma\colon [0,1] \to X$ stetig, $\pi(y_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es ein $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, sodass $\pi \circ \tilde{f} = f$.*

*Beweis:* $\gamma\,[[0,1]] \subseteq X$ ist kompakt. Zu $x \in \gamma[[0,1]]$ suche eine offene Umgebung $U_x$ von $x$ wie in der Definition des lokalen Produktes. Nach Kompaktheit von $\gamma[[0,1]]$ gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U_1, ..., U_n$. Nach der Wahl der $U_i$ gilt

$$\forall i \leq n\ \exists F_i = F_{U_i}, h_i\colon \pi^{-1}[U_i] \xrightarrow{\cong} U_i \times F_{U_i},\ p_1 \circ h_i = \pi \restriction \pi^{-1}[U_i]$$

Insbesondere können wir mit $t_0, ..., t_n$, $t_0 = 0, t_n = 1$, $t_i < t_{i+1}$ die $U_i$ so wählen, dass $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subseteq U_{i+1}$.
Es gilt $h_1(y_0) = (\gamma(0), f_1)$ für irgendein $f_1 \in F_{U_1}$ und, da $\pi(y_0) = \gamma(0)$, gilt $p_1 \circ h_1(y_0) = \gamma(0)$. Es sei für $t \in [t_0, t_1]$

$$\tilde{\gamma}_1(t) := h_1^{-1}(\gamma(t), f_1).$$

$\tilde{\gamma}_1$ ist auf $[t_0, t_1]$ stetig. Weiterhin gilt

$$\tilde{\gamma}_1(t_1) = h_1^{-1}(\gamma(t_1), f_1) = h_2^{-1}(\gamma(t_1), f_2)$$

für ein $f_2 \in F_{U_2}$. Für $t \in [t_1, t_2]$ setzen wir

$$\tilde{\gamma}_2(t) = h_2^{-1}(\gamma(t), f_2)$$

nach ein paar weiteren Schritten sind wir fertig. Nun sei

$$\tilde{\gamma} = \bigcup_{i \leq n} \tilde{\gamma}_i$$

Dann ist $\tilde{\gamma} \colon [0, 1] \to Y$ stetig, da die Verklebung endlich vieler stetiger Funktionen. Nach Konstruktion gilt für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i$ beliebig):

$$\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = p_1 \circ h_i(\tilde{\gamma}) = p_1 \circ h_i \circ h_i^{-1}(\gamma(t), f_i) = p_1(\gamma(t), f_i) = \gamma(t).$$

□

*Beispiel* 11.47. Es sei $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$. $\pi$ ist ein lokales Produkt. Wir setzen $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f(t))$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

**Satz 11.48.** *Es sei $\pi \colon Y \to X$ eine Überlagerung, $f \colon Z \to X$ stetig und sei $Z$ zusammenhängend. Es sei $z_0 \in Z, y_0 \in \pi^{-1}[\{f(z_0)\}]$. Dann gibt es höchstens eine Hochhebung $\tilde{f} \colon Z \to Y$, sodass $\pi \circ \tilde{f} = f, \tilde{f}(z_0) = y_0$.*

*Beweis:* Es seien $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ beides Hochhebungen von $f$, sodass $\tilde{f}_i(z_0) = y_0, i = 1, 2$. Es sei

$$A = \{z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\},\ A' = Z \setminus A$$

$A$ ist nichtleer, da $z_0 \in A$. Weiterhin sind $A$ und $A'$ offen: Es sei $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$. Da $f(z) \in X$, gibt es eine offene Umgebung $U$ und es gibt $I, U_i, i \in I$, sodass

$$\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und $\pi \restriction U_i \cong U$. Dann ist für $z_1 \in V = \tilde{f}_1^{-1}[U_i] \cap \tilde{f}_2^{-1}[U_i]$:

$$\pi \circ \tilde{f}_1(z_1) = f(z_1) = \pi \circ \tilde{f}_2(z_1)$$

und damit ist auch $\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{f}_2(z_1)$, da $\pi \restriction U_i$ injektiv ist. Also ist $V \subseteq A$. Der Beweis für die Offenheit von $A'$ ist ähnlich. Da $Z$ zusammenhängend ist, ist $A' = \emptyset$ und $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. □

**Definition 11.49.** Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Wir sagen $U \subseteq X$ hat die Überlagerungseigenschaft, falls folgendes gilt:

1. $U$ ist offen.
2. Es gibt ein diskretes $D$ und $D' \subseteq D$, sodass $\pi^{-1}[U] = \bigcup_{d \in D'} V_d$ und die $V_d$ offen und paarweise disjunkt sind.
3. Für alle $d \in D'$ ist $\pi \restriction V_d\colon V_d \xrightarrow{\cong} U$.

**Satz 11.50.** *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $X$ zusammenhängend. Es seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to X$ Wege von $x_0$ nach $y_0$, die $\{0,1\}$-homotop sind via $H$. Es sei $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung $\tilde{H}\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$ und eindeutige Wege $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$, sodass*

1. *$\pi \circ \tilde{H} = H$.*
2. *$\pi \circ \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$.*
3. *$\pi \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$.*
4. *$\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x_0}, \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$.*
5. *Für alle $t \in [0,1]$ ist $\tilde{H}(t,0) = \tilde{\gamma}_0(0)$ sowie $\tilde{H}(t,1) = \tilde{\gamma}_0(1)$.*

*Falls $x_0 = y_0$, so ist nicht unbedingt $\tilde{x_0} = \tilde{\gamma_0}(1) = \tilde{\gamma_1}(1)$.*

*Beweis:* Wir zeigen die Existenz, die Eindeutigkeit folgt dann aus Satz 11.48.

Wir wählen zuerst $N, M \in \mathbb{N}$ sowie $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = 1$ sowie $(U_{i,j})_{1 \le i \le N, 1 \le j \le M}$, sodass mit

$$Q_{i,j} := [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1,t_j}]\ 1 \le i \le N, 1 \le j \le M$$

gilt, dass $H[Q_{i,j}] \subseteq U_{i,j}$ und $U_{i,j}$ die Überlagerungseigenschaft hat. Das heißt, es gibt ein diskretes $D_{i,j}$ und $D'_{i,j} \subseteq D$, sodass $\pi^{-1}[U] = \bigcup_{d \in D'_{i,j}} V_d^{i,j}$ und die $V_d^{i,j}$ offen, paarweise disjunkt und jeweils via $\pi$ zu $U_{i,j}$ homöomorph sind.

Das ganze geht wegen der Kompaktheit (wie oben), indem wir zuerst für jedes $x \in H[[0,1] \times [0,1]]$ so ein $U_x$ wählen, dann zu einer endlichen Teilüberdeckung übergehen und diese schließlich durch die Kästchen approximieren.

Nun sei $d_{1,1}$ so gewählt, dass $\tilde{x}_0 \in V^{1,1}_{d_{1,1}}$. Wir setzen für $(s,t) \in Q_{1,1}$:

$$\tilde{H}(s,t) = (\pi \restriction V^{1,1}_{d_{1,1}})^{-1}(H(s,t))$$

dies ist stetig, da $\pi^{-1}$ stetig ist. Natürlich gilt $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$ und $\pi \circ (\tilde{H} \restriction Q_{1,1}) = H \restriction Q_{1,1}$. Nun setzen wir $\tilde{H}$ geeignet auf $Q_{1,2}$ fort. Dies geht so: Nach Voraussetzung gilt für $(s,t_1) \in Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$, dass $\pi(\tilde{H}(s,t_1)) = H(s,t_1) \in U_{1,2}$, also $\tilde{H}(s,t_1) \in V^{1,2}_{d_s}$ für ein $d_s \in D'_{1,2}$ ist. Allerdings gilt, dass die Funktion $s \mapsto \tilde{H}(s,t_1)$ stetig ist und somit ein zusammenhängendes Bild hat. Demnach müssen alle $d_s$ gleich sein, wir nennen sie $d_{1,2}$. Es gilt somit für alle $(s,t_1) \in Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$:

$$\tilde{H}(s,t_1) = (\pi \restriction V^{1,2}_{d_{1,2}})^{-1}(H(s,t_1))$$

denn $\tilde{H}(s,t_1) \in V^{1,2}_{d_{1,2}}$ und $\pi(\tilde{H}(s,t_1)) = H(s,t_1)$ (und $\pi$ ist, eingeschränkt auf $V^{1,2}_{d_{1,2}}$, ein Isomorphismus). Nun setzen wir für $(s,t) \in Q_{1,2}$:

$$\tilde{H}(s,t) = (\pi \restriction V^{1,2}_{d_{1,2}})^{-1}(H(s,t))$$

dies funktioniert nach unserer vorherigen Gleichung (auf dem gemeinsamen Definitionsbereich stimmen beide Funktionen schon überein).

So machen wir weiter und füllen irgendwann (aber nach endlich vielen Schritten) ganz $[0,1] \times [0,1]$ aus.

Wir müssen noch zeigen, dass $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ ist. Nach Voraussetzung ist $\pi \circ \tilde{H}[[0,1] \times \{0\}] = x_0$. Damit gilt $\tilde{H}[[0,1] \times \{0\}] \subseteq \pi^{-1}[\{x_0\}]$. Allerdings ist $[0,1] \times \{0\}$ zusammenhängend und $\pi^{-1}[\{x_0\}]$ diskret. Also ist $\tilde{H}[[0,1] \times \{0\}]$ eine Einpunktmenge, welche nach Voraussetzung genau $\{\tilde{x}_0\}$ ist. □

**Korollar 11.51.** *Es sei $\pi \colon Y \to X$ eine Überlagerung, $X$ zusammenhängend. Es sei $\tilde{\gamma} \colon [0,1] \to Y$ ein Weg, sodass $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$ und*

$$(\pi \circ \tilde{\gamma})(0) = (\pi \circ \tilde{\gamma})(1) = x_0 \in X$$

*Dann ist*

$$[\pi \circ \tilde{\gamma}] \neq [\epsilon_{x_0}]$$

*Beweis:* Es sei die Behauptung falsch und $H\colon [0,1]\times[0,1]\to X$ eine $\{0,1\}$-Homotopie von $\pi\circ\gamma$ und $\epsilon_0$. Es sei $\tilde{x_0}\in\pi^{-1}[\{x_0\}]$ und $\tilde{H}\colon [0,1]\times[0,1]\to X$ die eindeutige Hochhebung, sodass $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{H}(0,0)=\tilde{x_0}$. Da $\tilde{H}$ eine $\{0,1\}$-Homotopie ist und $\tilde{H}(1,1)=\tilde{\epsilon_{x_0}}(s)=\tilde{x_0}$, ist insbesondere $\tilde{H}(0,t)=\tilde{x_0},\tilde{H}(1,t)=\tilde{x_0}$. Damit gilt

$$\tilde{\gamma}(0)=\tilde{H}(0,0)=\tilde{x_0}=\tilde{H}(1,0)=\tilde{\gamma}(1)$$

ein Widerspruch. □

**Korollar 11.52.**

$$(\pi_1(S^1,x_0),\cdot)\cong(\mathbb{Z},+)$$

*Beweis:* Es gilt $S^1\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (bzgl. der Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$). Da die Isomorphieklasse der Fundamentalgruppe unter Homöomorphismen invariant ist, reicht es also, mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zu arbeiten. Für $z\in\mathbb{Z}$ sei $\tilde{\gamma_z}(t)=tz$ sowie $\gamma_z=\pi\circ\tilde{\gamma_z}$. Es sei weiterhin $\pi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Projektion. Dies ist eine Überlagerung. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\Psi\colon(\mathbb{Z},+)&\to\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\cdot)\\ n&\longmapsto[\gamma_n]\end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

1. $\Psi$ ist ein Homomorphismus: Es seien $\gamma_n,\gamma_m$ Wege und $n\neq -m$. Dann gilt
$$\gamma_n*\gamma_m(t)=\begin{cases}\gamma_n(2t) & \text{für } t\leq\frac{1}{2}=\pi(2tn);\\ \gamma_m(2t-1) & \text{für } t\geq\frac{1}{2}=\pi((2t-1)m).\end{cases}$$
Es sei $\varphi$ definiert durch
$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{2tn}{n+m} & \text{für } 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ \frac{(2t-1)m+n}{n+m} \text{ für } \frac{1}{2}\leq t\leq 1,\end{cases}$$
dann ist $\varphi$ stetig sowie $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$. Damit gilt nach Lemma 11.17
$$[\gamma_{n+m}]=[\gamma_{n+m}\circ\varphi]=[\gamma_n*\gamma_m]$$
Im Falle $n=-m$ rechnet man von Hand nach, dass $[\gamma_n*\gamma_m]=\epsilon_{x_0}$.

2. $\Psi$ ist injektiv: Da $\Psi$ ein Homomorphismus ist, genügt zu zeigen, dass $ker(\Psi) = \{0\}$. Es sei $z \neq 0$. Dann ist $\tilde{\gamma_z}(0) = 0 \neq z = \tilde{\gamma_z}(1)$ und damit ist $[\gamma_z] \neq [\epsilon_0]$.

3. $\Psi$ ist surjektiv: Es sei $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0)$. Dann existiert ein $\tilde{\gamma}$ mit $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Dann ist $\tilde{\gamma}(1) = z \in \mathbb{Z}$, da $\pi \circ \tilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = 0$. Wir behaupten, dass $[\gamma] = [\gamma_z]$. Definiere

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, H(s,t) = \tilde{\gamma}(s)t + \tilde{\gamma_z}(s)(1-t).$$

Dann ist $H$ eine $\{0,1\}$-Homotopie zwischen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma_z}$ und $\pi \circ H$ ist eine $\{0,1\}$-Homotopie von $\gamma$ und $\gamma_z$.

□

## 11.4 Retraktionen

**Definition 11.53.** Es sei $X$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. $r\colon X \to A$ heißt Retraktion, wenn $r$ stetig ist und $r \restriction A = \mathrm{id}_A$.

**Korollar 11.54.** *Es gibt keine Retraktion von $\overline{B^2}$ auf $S^1$.*

*Beweis:* Angenommen, $r\colon \overline{B^2} \to S^1$ sei eine Retraktion, dann ist $r \circ i = id_{S^1}$ (wobei $i$ die Inklusionsabbildung bezeichnet). Dann ist insbesondere

$$(id_{S^1})_{x_0,*} = id_{\pi_1(S^1,x_0)} = (r \circ i)_* = r_{*,i(x_0)} \circ i_{*,x_0}.$$

Damit wäre insbesondere $r_{*,i(x_0)}\colon \pi_1(\overline{B^2}, i(x_0)) \to \pi_1(S^1, x_0)$ surjektiv. Aber $(\overline{B^2}, x_0)$ hat eine triviale Fundamentalgruppe, da $\overline{B^2}$ zusammenziehbar ist. □

**Korollar 11.55** (Der Brouwer'sche Fixpunktsatz in Dimension 2)**.** *Es sei $f\colon \overline{B^2} \to \overline{B^2}$ stetig. Dann hat $f$ einen Fixpunkt, d.h. $\exists x \in \overline{B^2}\ f(x) = x$.*

*Beweis:* Es sei die Behauptung falsch und $f$ stetig ohne Fixpunkt. Dann ist $\forall x \in \overline{B^2}\ f(x) - x \neq 0$. Es sei

$$A(x) = |x - f(x)|^2,\ B(x) = \langle x - f(x), x\rangle,\ C(x) = |x|^2 - 1.$$

$A, B$ und $C$ sind stetig. Es sei $t\colon \overline{B^2} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$t(x) = \frac{-B(x) + \sqrt{B(x)^2 - A(x)C(x))}}{A(x)}$$

$t$ ist stetig, da $A(x) \neq 0$ für alle $x \in \overline{B^2}$ und

$$B(x)^2 - A(x)C(x) = \langle x - f(x), x\rangle^2 - \langle x - f(x), x - f(x)\rangle(|x|^2 - 1).$$

Wenn $x \in S^1$, dann folgt $C(x) = 0$ und damit $t(x) = 0$. Es sei nun $r\colon \overline{B^2} \to S^1$ definiert durch

$$r(x) = x + t(x)(x - f(x))$$

Dann ist $r$ eine Retraktion: $r$ ist offensichtlich stetig. Weiterhin gilt:

1. $r \restriction S^1 = \mathrm{id}_{S^1}$, da $t(x) = 0$ für $x \in S^1$.
2. Es sei $x \in \overline{B^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|r(x)|^2 &= |x|^2 + t^2(x)|x - f(x)|^2 + 2tx\langle x, x - f(x)\rangle \\
&= C(x) + 1 + t^2(x)A(x) + 2t(x)B(x) \\
&= C(x) + 1 + \frac{B^2(x) + B^2(x) - A(x)C(x) - 2B(x)\sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)}}{A(x)} \\
&\quad + 2\frac{-B^2(x) + B(x)\sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)}}{A(x)} \\
&= C(x) + 1 + \frac{B^2(x) - B^2(x) + (-2B(x) + 2B(x))\sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)} - A(x)C(x)}{A(x)} \\
&= C(x) + 1 - C(x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

**Satz 11.56.** *Es sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es ein $x \in S^2$, sodass $f(x) = f(-x)$.*

*Beweis:* Es sei dem nicht so. Dann ist $G$, definiert durch

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

stetig. Weiterhin ist $G\colon S^2 \to S^1$ und es gilt $G(-x) = -G(x)$. Wir betrachten den Weg $\gamma\colon [0,1] \to S^2$, definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir drehen $S^1$ so, dass $G(\gamma(0)) = 1$. Setzen wir $g := G \circ \gamma$, so ist $G_*([\gamma]) = [g] \in \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Weiterhin gilt für $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$g\left(t + \frac{1}{2}\right) = G\left(\begin{pmatrix} \cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = G(-\gamma(t)) = -G(\gamma(t)) = -g(t).$$

Wir nehmen die Überlagerung $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definiert durch $\pi(r) = [r]$. $\tilde{g}$ sei irgendeine Hochhebung von $g$ nach $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\tilde{g}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

denn $\pi \circ \tilde{g} = g$ und $g(t + \frac{1}{2}) = -g(t)$. Also gibt es für jedes $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ein $q_t \in \mathbb{Z}$, sodass $\tilde{g}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{g}(t) = q_t + \frac{1}{2}$. Da die Abbildung $t \mapsto q_t$ stetig ist, ist sie konstant (mit Wert $q$). Also haben wir insbesondere

$$\tilde{g}(1) = \tilde{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \tilde{g}\left(0 + \frac{1}{2}\right) + q + \frac{1}{2} = 2q + 1$$

Insgesamt ist $[g]$ gleich der $q$-fachen Addition eines Generators von $\pi_1(S^1)$ und, da $q$ ungerade ist, nichttrivial. Aber $g = G \circ \gamma$ und $\gamma$ ist natürlich nullhomotop, also ist $g$ ebenfalls nullhomotop, ein Widerspruch. $\square$

## 11.5 Das freie Produkt

Es seien Gruppe $G_i = (G_i, \circ_i)$ für $i \in I$ gegeben. Das freie Produkt

$$(\bigstar_{i \in I} G_i, \circ)$$

ist die folgende Gruppe:

1. $\bigstar_{i \in I} G_i$ ist die Menge aller gekürzten Worte aus $\bigcup_{i \in I} G_i$, d.h.

   $$k = (k_0, ..., k_l)$$

   wobei benachbarte Buchstaben nicht aus der selben Gruppe kommen.

2. Die Verknüpfung ist definiert durch hintereinanderschreiben der Worte, wobei danach gekürzt wird.

3. Das neutrale Element ist das leere Wort, das Inverse von $k = (k_0, ..., k_l)$ ist
$$k^{-1} := (k_l^{-1}, ..., k_0^{-1})$$

**Satz 11.57** (Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen)**.** *Es seien $U, V$ topologische Räume, $X = U \cup V$. $U \cap V \neq \emptyset$ und $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend.*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[d, "(j_1)_*"] \arrow[dr, "h_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & \pi_1(X,x) \arrow[r, "h"] & G \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[u, "(j_2)_*"] \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

*Es seien $i_1, i_2, j_1, j_2$ die Inklusionen. Dann gilt: Falls $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$, dann gibt es genau einen Homomorphismus $h$, sodass $h_1 = h \circ (j_1)_*, h_2 = h \circ (j_2)_*$.*

Dies sagt aus, dass die Gruppe $\pi_1(X, x)$ das "Amalgamierte Produkt" von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$ über $\pi_1(U \cap V, x)$ ist. Dieses ist das freie Produkt von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$, modulo der durch $\pi_1(U \cap V, x)$ erzeugten Untergruppe. Insbesonder ist $\pi_1(X, x)$ das freie Produkt von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$, falls $\pi_1(U \cap V, x)$ trivial ist.

*Beispiel* 11.58. Es seien $U, V$ wie im Satz von Seifert-van Kampen. Es sei $\pi_1(U \cap V, x) = \{0\}$ und $G$ das freie Produkt von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$. Die Abbildungen $h_1$ und $h_2$ seien jeweils die natürlichen Einbettungen, das ein Gruppenelement auf das einelementige Wort, welches genau das Element enthält, abbildet. da $\pi_1(U \cap V, x)$ trivial ist, gilt natürlich $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$. Insofern gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $h$ von $\pi_1(X, x)$ nach $G$, sodass $h_1 = h \circ j_1$, $h_2 = h \circ j_2$. Nach der universellen Eigenschaft gilt dann, dass $h$ schon ein Isomorphismus sein muss.

**Korollar 11.59.** $\pi_1(S^n) = \{0\}$ *für* $n > 1$.

*Beweis:* Es sei $x \in S^n$ sowie $x_0, x_1 \in S^n$ verschieden und verschieden von $x$. Dann gilt $S^n = (S^n \setminus \{x_0\}) \cup (S^n \setminus \{x_1\})$ und $(S^n \setminus \{x_0\}) \cap (S^n \setminus \{x_1\})$ ist wegzusammenhängend.

Wir halten fest, dass $\pi_1(S^n \setminus \{x_0\}, x) = \pi_1(S^n \setminus \{x_1\}, x) = \{0\}$ ist, denn $S^n \setminus \{x_i\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^{n-1}$, welches zusammenziehbar ist.

Wir nehmen an, dass $G := \pi_1(S^n, x)$ nichttrivial ist. Es seien $h_1$, $h_2$ jeweils die einzigen Abbildungen von $\pi_1(S^n \setminus \{x_i\})$ nach $G$ (die trivialen Abbildungen). Natürlich gilt $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$, denn beide Abbildungen sind trivial. Allerdings gibt es nun zwei Homomorphismen $h$, sodass $h_i = h \circ (j_i)_*$, nämlich die triviale Abbildung und die Identität (da $(j_i)_*$ jeweils ebenfalls die triviale Abbildung ist). Dies ist ein Widerspruch. $\square$

**Satz 11.60** (Der Homotopie-Liftungssatz)**.** *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine überlagerung, $\tilde{F}\colon Z \to Y$ stetig, sodass $\pi \circ \tilde{F} = F$. Es sei $H(\cdot, 0) = F\colon Z \to X$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H}\colon Z \times [0,1] \to Y$, sodass $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{F}$.*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "\pi"] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & X
\end{tikzcd}$$

# Kapitel 12

# Dank

Ich danke Herrn Dr. Hannes Jakob und Herrn M.Sc. Patrick Meurin für die tatkräftige Mithilfe beim Schreiben eines LaTeX-Skripts der Vorlesung vom Sommersemester 2019. Ich danke Herrn Benedikt Heitz, Herrn Benedikt Kahle und Herrn Rodrigo Martín Orduña für Hinweise auf Fehler in früheren Fassungen des Skripts im Sommersemester 2025. Ich danke Herrn Dr. Jakob für die Mitarbeit am Skript im Sommersemester 2025.

# Index


$B_\varepsilon(x)$, 9
$K$-Algebra, 63
$f \restriction A$, 13
$f[A]$, 13
$f^{-1}[B]$, 13

Abbildung
    abgeschlossen, 13
    offen, 13
    stetig, 13
abgeschlossen, 8
Abschluss, 12
abzählbare Menge, 12
Abzählbarkeitsaxiom
    Erstes, 12
    Zweites, 12
Adjunktion, 23
Anheftung, 23

Bahn, 76
Bahnenraum, 78
Basis, 8
Basispunkt, 87
Berührungspunkt, 33, 36

dicht, 12
    nirgends, 12
diskret, 15
Dreiecksungleichung, 7

Einbettung, 16
Erzeugte Äquivalenzrelation, 75

Filter, 34
    fixiert, 35
    frei, 35
    Fréchet-, 35
Filterbasis, 34
Finaltopologie, 21
Fundamentalgruppe, 87
Funktor, 91

Gruppenoperation, 76
    transitiv, 77

Hausdorffraum, 39
homogener Raum, 80
homotop, 83
    geschlossen, 93
    relativ, 83
homotopieäquivalent, 85
Homotopieäquivalenz, 84
Homöomorphismus, 13
Häufungspunkt, 33

identifizierende Abbildung, 22
Initialtopologie, 19
Isotropiegruppe, 77

Kategorie, 90

kompakt, 57
Konvergenz, 33, 36

Lemma von Zorn, 35
lineare Ordnung, 11
lokal wegzusammenhängend, 29
lokal zusammenhängend, 29
lokale Überlagerung, 96
lokales Produkt, 96

Möbiusband, 24
Metrik, 7
Metrischer Raum, 7

Nachbarschaftsfilter, 69
normal, 40

offen, 8
Offenes Innere, 12
Orbit, 76

Produktabbildung, 19
Produktmenge, 17
Produkttopologie, 18
Projektion, 18
Pseudometrik, 10

Quotientenabbildung, 21
Quotiententopologie, 22

regulär, 40

Schleife, 87
Sorgenfrey-Gerade, 11
Spurtopologie, 15
Standgruppe, 77
    Menge, 78
sternförmig, 86
Subbasis, 8
Summentopologie, 23
Supremumsmetrik, 63
symmetrische Relation, 69

T0-Raum, 39
T1-Raum, 39
T2-Raum, 39
T3-Raum, 39
T3a-Raum, 39
T4-Raum, 40
Topologie, 8
    Diskrete, 11
    Indiskrete, 10
    Kofinite, 11
    metrische, 10
    Ordnungs-, 11
    Standard-, 11
Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, 63
topologische Gruppe, 80
Topologischer Raum, 8
total unzusammenhängend, 29

Ultrafilter, 35
Umgebung, 11
Umgebungsbasis, 11
Umgebungsfilter, 34
Umgebungssystem, 11
uniforme Struktur, 69
uniformer Raum, 69
Unterraumtopologie, 15
Urysohn, 51

vollständig regulär, 40

Weg, 29
Wegzusammenhangskomponente, 30
wegzusammenhängend, 29

Zusammenhangskomponente, 29

zusammenhängend, 25
Zusammenklebung, 23
Zusammenschlagen, 23
zusammenziehbar, 85