BLATT 01
22.04.2025

Abgabe am Dienstag, 29.04.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1. Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Betrachten Sie folgende Eigenschaften:

(a) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist $A \cup B \in \mathcal{A}$.

(b) Für jede Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist $\bigcap \mathcal{B} = \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{B}(x \in A)\} \in \mathcal{A}$.

(c) $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$.

Beantworten Sie (mit Begründung) folgende Fragen:

1. Gegeben ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, das die Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt, gibt es eine Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ auf X, sodass $\mathcal{A}$ genau aus den abgeschlossenen Mengen bezüglich $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ besteht?
2. Gegeben eine Topologie $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, welche Eigenschaften von (a), (b) und (c) werden vom System der abgeschlossenen Mengen bezüglich $\mathcal{O}$ erfüllt?

Definition. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls es eine Injektion $f\colon A \to \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 2. Sei $X = \mathbb{N}$. Entscheiden Sie (mit Begründung) für folgende Mengensysteme $\mathcal{A}_i$, ob es eine Topologie auf X gibt, deren abgeschlossene Mengen genau die Elemente von $\mathcal{A}_i$ sind.

1. Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq X \mid A = X \text{ oder } A \text{ ist endlich}\}$.
2. Sei $\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq X \mid A = X \text{ oder } A \text{ ist abzählbar}\}$.
3. Sei $\mathcal{A}_3 := \{A \subseteq X \mid A = X \text{ oder } A = \emptyset \text{ oder } A \text{ ist unendlich}\}$.

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

1. Gilt
$$\overline{A} = \bigcap\{C \subseteq X \mid A \subseteq C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen}\}?$$
2. Gilt
$$\overline{X \setminus A} = X \setminus (\mathring{A})?$$

Aufgabe 4. Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

(c) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

(d) Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ ist $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$.

Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X gibt, sodass für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt, dass $\mathrm{cl}(A) = \overline{A}$, wobei $\overline{A}$ den Abschluss von A bezüglich $\mathcal{O}$ bezeichnet.