

BLATT 05
20.05.2025

Abgabe am Dienstag, 27.05.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1. Wir beweisen das “d.h.” in Definition 4.11. Konkret: Es seien X eine Menge und $\mathcal{U}$ ein Filter über X . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $\mathcal{U}$ ist $\subseteq$ -maximal unter den Filtern, d.h. für jeden Filter $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.
2. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $A \in \mathcal{U}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Aufgabe 2. Finden Sie einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und eine Teilmenge $A \subseteq X \times X$, sodass A nicht abgeschlossen ist (bzgl. der Produkttopologie), aber jede Sektion $A_x := \{y \in X \mid (x, y) \in A\}$ (für $x \in X$) abgeschlossen ist?

Aufgabe 3 (6 Punkte). Es seien X, Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wenn $\mathcal{F}$ ein Filter über X ist, so setzen wir den “push forward von $\mathcal{F}$ auf Y mittels f ” als

$$f_*(\mathcal{F}) := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{F}\}.$$

Zeigen Sie:

1. Wenn $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über X ist, dann ist $f_*(\mathcal{U})$ ein Ultrafilter über Y .

Hinweis: Benutzen Sie Charakterisierung (2) aus Aufgabe 1.

2. Wenn $x \in X$ und f stetig in x ist, dann gilt für jeden Filter $\mathcal{F}$ über X : Wenn $\mathcal{F} \rightarrow x$, so folgt $f_*(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$.
3. Wenn $x \in X$, dann gilt: Wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ über x gilt, dass aus $\mathcal{F} \rightarrow x$ folgt, dass $f_*(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$, dann ist f stetig in x .

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von X . Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq X \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, x_n \in A\}.$$

Zeigen Sie:

4. $\mathcal{F}$ ist ein Filter.
5. Wenn $x \in X$ ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, dann ist x ein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$.
6. Wenn $x \in X$ ein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$ ist, dann ist x ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Finden Sie einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ derart, dass $\mathcal{O}$ nicht der Summentopologie der disjunkten Vereinigung der Zusammenhangskomponenten entspricht?

Bonus-Aufgabe. Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ die Sorgenfrey-Gerade (siehe die Bonusaufgabe auf Blatt 2). Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$, die diskret bzgl. der Produkttopologie von $\mathcal{O}_S$ und gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist?

Dies steht natürlich im Kontrast zu der Aussage (die in der Lösung der Bonusaufgabe auf Blatt 2 bewiesen wurde), dass es keine überabzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt, die diskret bzgl. $\mathcal{O}_S$ ist. Außerdem gibt es keine überabzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$, die diskret bzgl. der metrischen Topologie ist.