BLATT 06

27.05.2025

Abgabe am Dienstag, 03.06.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $(X, \mathscr{O})$ ist ein $T3a$-Raum.
2. Die Kollektion
$$\{f^{-1}[U] \mid U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}, f\colon X \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$
ist eine Basis von $(X, \mathscr{O})$ (hierbei ist „offen" bzgl. der Standardtopologie und „stetig" bzgl. $\mathscr{O}$ und der Standardtopologie gemeint).

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jeder Unterraum eines $T3a$-Raumes wieder ein $T3a$-Raum ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jeder abgeschlossene Unterraum eines $T4$-Raumes wieder ein $T4$-Raum ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Es sei X ein T_1-Raum und $x \in X$. Es sei

$$F_x := \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid x \in U \subseteq X \text{ offen, } f \text{ stetig}\}.$$

Auf F_x definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_x$ durch

$$f_1 \sim_x f_2 :\Longleftrightarrow \exists V \in \mathscr{U}(x)\ f_1 \upharpoonright V = f_2 \upharpoonright V.$$

Es sei $G_x := F_x / \sim_x$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\gamma_x\colon F_x \to G_x$ die Projektionsabbildung, d.h. $\gamma_x(f) := [f]_{\sim_x}$. Die Klasse $\gamma_x(f)$ wird auch *Keim von f in x* genannt. Die Vereinigung $G := \bigcup_{x \in X} G_x$ wird *Garbe der Keime stetiger Funktionen* genannt.

1. Zeigen Sie, dass $G_x \cap G_y = \emptyset$ ist, wenn $x \neq y$. Das heißt, für $x \neq y$ und $f \in F_x, g \in F_y$ gilt $[f]_{\sim_x} \neq [g]_{\sim_y}$.

   Hinweis: Finden Sie eine Umgebung von x, die nicht y enthält?

Das heißt, wir erhalten eine wohldefinierte Funktion $\pi\colon G \to X$ durch

$$\pi(g) = x :\Longleftrightarrow g \in G_x.$$

Sei $U \subseteq X$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen $B_f := \{\gamma_x(f) \mid x \in U\} \subseteq G$.

2. Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := \{B_f \mid U \subseteq X \text{ offen, } f\colon U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ eine Basis einer Topologie auf G ist. Wir bezeichnen diese mit $\mathscr{O}$.

3. Ist π bzgl. $\mathscr{O}$ ein lokaler Homöomorphismus? D.h., gibt es für jedes $g \in G$ Umgebungen V von g in G und U von $\pi(g)$ in X, sodas $\pi \restriction V \colon V \to U$ ein Homöomorphismus ist?

Bonus-Aufgabe. Es sei $(\omega_1, <)$ eine lineare Ordnung, sodass es für jede Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \omega_1$ ein $\alpha \in \omega_1$ gibt, sodass $f(n) < \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (ω_1 ist die erste überabzählbare Ordinalzahl, die Existenz dieser wird in der Mengenlehre bewiesen). Es sei $\omega_1 + 1 := \omega_1 \cup \{\omega_1\}$, wir setzen die Ordnung fort durch $\alpha < \omega_1$ für alle $\alpha \in \omega_1$. Ebenso sei $\mathbb{N} + 1 := \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, geordnet auf dieselbe Weise. Wir betrachten $(\omega_1 + 1, <)$ und $(\mathbb{N} + 1, <)$ mit der Ordnungstopologie und ihr Produkt $T := (\omega_1 + 1) \times (\mathbb{N} + 1)$ mit der Produkttopologie.

Sie müssen nicht zeigen, dass T normal ist (dies folgt daraus, dass T als Produkt von kompakten Hausdorffräumen kompakt und Hausdorff ist, das lernen wir allerdings erst später). Zeigen Sie, dass der Raum $T_\infty := T \smallsetminus \{(\omega_1, \mathbb{N})\}$ nicht normal ist, indem Sie zeigen, dass die Mengen $A := \{(\omega_1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B := \{(\alpha, \mathbb{N}) \mid; \alpha \in \omega_1\}$ disjunkt, abgeschlossen und untrennbar sind (in der Unterraumtopologie).