BLATT 07

03.06.2025

Abgabe am Dienstag, 17.06.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation of X derart, dass die Projektionsabbildung $p\colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]_\sim$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass der Quotient $X/\sim$ mit der Quotiententopologie ebenfalls ein T4-Raum ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist ein *komplexes Polynom*, wenn Sie sich als Summe von Funktionen der Form

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto a \prod_{i \leq n} z_i^{d_i}$$

mit $a \in \mathbb{C}$ und $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt.

Sie können ohne Beweis annehmen: Wenn für ein komplexes Polynom $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ (bzgl. der Standardtopologie) existiert, sodass $f[U] = \{0\}$, dann gilt schon $f[\mathbb{C}^n] = \{0\}$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine Menge $\mathcal{P}$ von komplexen Polynomen gibt, sodass

$$A = N(\mathcal{P}) := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall f \in \mathcal{P}(f(z_1, \dots, z_n) = 0)\}$$

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen*, wenn das Komplement $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist.

1. Zeigen Sie, dass das System der Zariski-offenen Mengen eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$ bildet (wir nennen diese Topologie die *Zariski-Topologie*).
2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ Zariski-offen und nichtleer.
   (a) Ist U offen bzgl. der Standardtopologie auf $\mathbb{C}^n$?
   (b) Ist U dicht in $\mathbb{C}^n$ bzgl. der Standardtopologie?
3. Ist $\mathbb{C}^n$ mit der Zariski-Topologie ein T1-Raum?
4. Ist $\mathbb{C}^n$ mit der Zariski-Topologie ein T2-Raum?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Wir bezeichnen mit $\beta(X)$ die Menge aller Ultrafilter auf X. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ sei $[A]$ die Menge aller $\mathscr{U} \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \in \mathscr{U}$.

1. Zeigen Sie, dass die Kollektion $\{[A] \mid A \subseteq X\}$ die Basis einer Topologie auf $\beta(X)$ ist (wir bezeichnen diese mit $\mathscr{O}_\beta$).
2. Ist $(\beta(X), \mathscr{O}_\beta)$ ein T2-Raum?

3. Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung $f\colon \beta(X) \to \prod_{A\subseteq X} 0, 1$ gibt. Entscheiden Sie für ihre Abbildung:

   (a) Ist das Bild $f[\beta(X)]$ abgeschlossen in $\prod_{A\subseteq X}\{0,1\}$ (bzgl. der Produkttopologie der diskreten Topologie)?

   (b) Ist die Abbildung ein Homömorphismus von $\beta(X)$ und $f[\beta(X)]$?

4. Zeigen Sie, dass die Kollektion der fixierten Ultrafilter dicht in $(\beta(X), \mathscr{O}_\beta)$ liegt.