# BLATT 08

17.06.2025

Abgabe am Dienstag, 24.06.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

**Aufgabe 1** (1+1+2 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzgl. der kofiniten Topologie.
2. Sei $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ der Raum aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Metrik $d$ auf $X^2$ durch $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup\{|x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Gibt es eine Folge von Elementen von $X$ (also eine Folge von Folgen), die keinen Häufungspunkt bzgl. $d$ hat?
3. Gibt es auch eine Cauchyfolge von Elementen von $X$, die keinen Häufungspunkt bzgl. $d$ hat?

**Aufgabe 2** (2+2 Punkte)**.** Es sei $X$ ein topologischer Raum und $Y$ ein kompakter Hausdorff-Raum.

1. Beweisen Sie: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph
$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$
eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums $X \times Y$ ist.

   **Hinweis:** Es könnte nützlich sein, zu zeigen, dass $f^{-1}[V] \subseteq X$ offen ist, falls jedes $x \in f^{-1}[V]$ eine Umgebung $W \subseteq X$ hat, sodass $(W \times (Y \setminus V)) \cap G_f = \emptyset$.
2. Geben Sie für jede Richtung der Äquivalenz gegebenfalls Gegenbeispiele für den Fall an, dass man eine der Voraussetzungen an $Y$ weglässt.

**Aufgabe 3** (2+2 Punkte)**.** Ein topologischer Raum $X$ heißt *lokalkompakt*, falls $X$ hausdorffsch ist und es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \in \mathscr{U}(x)$ und eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt, sodass $U \subseteq K$.

1. Ist jeder lokalkompakte Raum $X$ regulär?
2. Sei $X$ lokalkompakt. Gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder offenen Umgebung $U \in \mathscr{U}(x)$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathscr{U}(x)$, sodass $K \subseteq U$?

*Bitte wenden.*

**Definition.** Seien $X$ und $Y$ topologische Räume. $C(X, Y)$ bezeichne die Menge der stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$. Wir definieren eine Topologie auf $C(X, Y)$ wie folgt: Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und eine offene Teilmenge $O \subseteq Y$ definieren wir

$$U(K, O) := \{f \in C(X, Y) \mid f[K] \subseteq O\}$$

Die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X, Y)$ wird erzeugt von der Subbasis

$$\mathscr{S} := \{U(K, O) \mid K \subseteq X \text{ kompakt}, O \subseteq Y \text{ offen}\}$$

**Aufgabe 4** (1+1+1+1 Punkte und 1+1+1+1 Bonuspunkte)**.** Seien $X$ und $Y$ topologische Räume.

1. Ist $Y$ ein Hausdorff-Raum, so ist $C(X, Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie ein Hausdorff-Raum.

2. Ist $X$ lokalkompakt, dann ist die Auswertungsabbildung $\epsilon\colon C(X, Y) \times X \to Y$, definiert durch $\epsilon(f, x) := f(x)$, stetig.

Nun seien $X$, $Y$ und $Z$ topologische Räume. Die Mengen $C(X, Y)$, $C(X \times Y, Z)$ und $C(X, C(Y, Z))$ seien mit der jeweiligen kompakt-offenen Topologie ausgestattet (auf $X \times Y$ nehmen wir die Produkttopologie). Wir definieren die kanonische Abbildung $h$ wie folgt:

$$\begin{aligned} h\colon C(X \times Y, Z) &\to C(X, C(Y, Z)) \\ f &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x, y))) \end{aligned}$$

Das heißt, $h(f)$ ist eine Abbildung von $X$ nach $C(Y, Z)$, die $x$ auf eine Abbildung von $Y$ nach $Z$ abbildet, welche wiederum $y$ auf $f(x, y)$ abbildet. Überprüfen Sie:

3. Sei $x \in X$. Ist $h(f)(x) \in C(Y, Z)$?

4. Ist $h$ wohldefiniert, d.h. für $f \in C(X \times Y, Z)$, ist $h(f) \in C(X, C(Y, Z))$?

5. Ist $h$ stetig?

6. Ist $h$ injektiv?

7. Nun sei $Y$ lokalkompakt. Ist $h$ surjektiv?

8. Nun sei $X$ hausdorffsch und $Y$ lokalkompakt. Ist $h$ ein Homöomorphismus? Im bejahenden Fall spricht man von einem Exponentialgesetz (da in diesem Fall $Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$ wie man es von den Zahlen gewohnt ist).

   Das einfachste Beispiel ist, dass die Menge aller Funktionen von $X \times Y$ nach $Z$ in natürlicher Bijektion zur Menge aller Funktionen von $X$ in die Menge aller Funktionen von $Y$ nach $Z$ steht.