BLATT 08
24.06.2025

Abgabe am Dienstag, 01.07.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1 (2+2 Punkte). Wir betrachten den topologischen Raum $X = \mathbb{C}$ mit der üblichen Topologie. Wir fassen die Kreislinie S^1 als Unterraum von X auf, $S^1 := \{a + bi \in X \mid a^2 + b^2 = 1\}$.

Auf dem topologischen Raum $Y = [0, 1]$ (ebenfalls mit der Standardtopologie) betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$, sodass $y_0 \sim y_1$ genau dann, wenn $y_0 = y_1$ oder $y_0 = 0, y_1 = 1$ (und umgekehrt). Es sei $f: Y/\sim \rightarrow S^1$ definiert durch $f([t]_{\sim}) := e^{2\pi it}$. Weiterhin sei $p: Y \rightarrow Y/\sim$ die Projektionsabbildung.

1. Ist f wohldefiniert? Ist f ein Homöomorphismus?
2. Ist $f \circ p$ offen?

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X folgenkompakt ist, d.h. wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \omega}$ von Elementen von X eine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Wir betrachten zwei Möglichkeiten, den Kegel über einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ zu definieren.

Einerseits sei $CX := (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$, d.h. wir bilden das "Prisma" über X und ziehen die oberste Kopie von X zu einem Punkt zusammen. CX trage als Topologie die Quotiententopologie bzgl. der Produkttopologie der Standardtopologien.

Andererseits sei (für $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig) $\tilde{C}X$ definiert als

$$\tilde{C}X := \{(1-t) \cdot x' + t \cdot p \mid t \in [0, 1], x' \in X \times \{0\}\}$$

$\tilde{C}X$ trage die Unterraumtopologie bzgl. der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Zeigen Sie, dass CX und $\tilde{C}X$ homöomorph sind (für Hilfe betrachten Sie Beispiel 10.3 im Skript und führen Sie den Beweis aus).

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Für $S \subseteq X$ sei

$$\text{diam}(S) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

der Durchmesser von S .

Zeigen Sie: Zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ von X existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$ derart, dass jede Teilmenge $S \subseteq X$ mit $\text{diam}(S) < \lambda$ vollständig in einer Menge U_i enthalten ist.

Bitte wenden

Aufgabe 5 (2+(1+1) Punkte).

1. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ und $(Y_i, \mathcal{O}'_i)_{i \in I}$ topologische Räume und $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ Homöomorphismen. Sind die Räume $\prod_{i \in I} X_i$ und $\prod_{i \in I} Y_i$ homöomorph (bzgl. der Produkttopologien)?
2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{Z}^n, +)$ bezeichne die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ mit komponentenweiser Addition. Diese Gruppe operiere auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\oplus((z_1, \dots, z_n), (r_1, \dots, r_n)) = (z_1 + r_1, \dots, z_n + r_n)$$

- (a) Ist $\oplus$ tatsächlich eine Gruppenoperation?
- (b) Ist $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ homöomorph zu $(\mathbb{R} / \mathbb{Z})^n$ (bzgl. der Produkttopologie)?

Bonus-Aufgabe (4 Punkte). Es sei X ein topologischer Raum. Wir definieren das Spiel $G(X)$ wie folgt: I und II spielen abwechselnd offene Teilmengen von X . Weiterhin muss die Folge der Mengen absteigend sein. I beginnt. D.h., I spielt $U_0 \subseteq X$ offen, dann spielt II $U_1 \subseteq U_0$ offen, dann spielt I $U_2 \subseteq U_1$ offen und so weiter. Das Spiel dauert $\mathbb{N}$ viele Runden. Am Ende gewinnt I, falls $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$, sonst gewinnt II.

Wir sagen, dass II eine *Gewinnstrategie* hat, wenn es eine Funktion f gibt, die einer Folge $(U_0, \dots, U_n)$ (mit n gerade) eine Menge $f((U_0, \dots, U_n)) \subseteq U_n$ zuweist, sodass für jede absteigende Folge $(U_0, U_1, \dots)$ mit $U_{n+1} = f((U_0, \dots, U_n))$ für jedes gerade n gilt, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Intuitiv gesprochen kann II also stets so spielen, dass II am Ende gewinnt.

Zeigen Sie, dass II eine Gewinnstrategie hat, falls die Topologie auf X durch eine Metrik erzeugt wird.