BLATT 08

revidierte Fassung vom 03.06.2025

Abgabe am Dienstag, 01.07.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Wir betrachten den topologischen Raum $X = \mathbb{C}$ mit der üblichen Topologie. Wir fassen die Kreislinie S^1 als Unterraum von X auf, $S^1 := \{a + bi \in X \mid a^2 + b^2 = 1\}$.

Auf dem topologischen Raum $Y = [0, 1]$ (ebenfalls mit der Standardtopologie) betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$, sodass $y_0 \sim y_1$ genau dann, wenn $y_0 = y_1$ oder $y_0 = 0, y_1 = 1$ (und umgekehrt). Es sei $f\colon Y/\sim \to S^1$ definiert durch $f([t]_\sim) := e^{2\pi i t}$. Weiterhin sei $p\colon Y \to Y/\sim$ die Projektionsabbildung.

1. Ist f wohldefiniert? Ist f ein Homöomorphismus?
2. Ist $f \circ p$ offen?

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X folgenkompakt ist, d.h. wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ von Elementen von X eine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Wir betrachten zwei Möglichkeiten, den Kegel über einer kompakten Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ zu definieren.

Einerseits sei $CX := (X \times [0, 1])/(X \times \{1\})$, d.h. wir bilden das "Prisma" über X und ziehen die oberste Kopie von X zu einem Punkt zusammen. CX trage als Topologie die Quotiententopologie bzgl. der Produkttopologie der Standardtopologien.

Andererseits sei (für $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig) $\tilde{CX}$ definiert als

$$\tilde{CX} := \{(1 - t) \cdot x' + t \cdot p \mid t \in [0, 1], x' \in X \times \{0\}\}$$

$\tilde{CX}$ trage die Unterraumtopologie bzgl. der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Zeigen Sie, dass CX und $\tilde{CX}$ homöomorph sind (für Hilfe betrachten Sie Beispiel 10.3 im Skript und führen Sie den Beweis aus).

Die Kompaktheit wird benutzt, um die Offenheit eines gesuchten Homömorphismus zu zeigen. Wir danken Herrn Heitz für den Hinweis.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Für $S \subseteq X$ sei

$$\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

der Durchmesser von S.

Zeigen Sie: Zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ von X existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$ derart, dass jede Teilmenge $S \subseteq X$ mit $\operatorname{diam}(S) < \lambda$ vollständig in einer Menge U_i enthalten ist.

Bitte wenden

Aufgabe 5 (2+(1+1) Punkte)**.**

1. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ und $(Y_i, \mathcal{O}'_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $f_i\colon X_i \to Y_i$ Homöomorphismen. Sind die Räume $\prod_{i\in I} X_i$ und $\prod_{i\in I} Y_i$ homöomorph (bzgl. der Produkttopologien)?

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{Z}^n, +)$ bezeichne die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ mit komponentenweiser Addition. Diese Gruppe operiere auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\oplus((z_1, \dots, z_n), (r_1, \dots, r_n)) = (z_1 + r_1, \dots, z_n + r_n)$$

   (a) Ist $\oplus$ tatsächlich eine Gruppenoperation?

   (b) Ist $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ homöomorph zu $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ (bzgl. der Produkttopologie)?

Bonus-Aufgabe (4 Punkte)**.** Es sei X ein topologischer Raum. Wir definieren das Spiel $G(X)$ wie folgt: I und II spielen abwechselnd offene Teilmengen von X. Weiterhin muss die Folge der Mengen absteigend sein. I beginnt. D.h., I spielt $U_0 \subseteq X$ offen, dann spielt II $U_1 \subseteq U_0$ offen, dann spielt I $U_2 \subseteq U_1$ offen und so weiter. Das Spiel dauert $\mathbb{N}$ viele Runden. Am Ende gewinnt I, falls $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$, sonst gewinnt II.

Wir sagen, dass II eine *Gewinnstrategie* hat, wenn es eine Funktion f gibt, die einer Folge $(U_0, \dots, U_n)$ (mit n gerade) eine Menge $f((U_0, \dots, U_n)) \subseteq U_n$ zuweist, sodass für jede absteigende Folge $(U_0, U_1, \dots)$ mit $U_{n+1} = f((U_0, \dots, U_n))$ für jedes gerade n gilt, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Intuitiv gesprochen kann II also stets so spielen, dass II am Ende gewinnt.

Zeigen Sie, dass II eine Gewinnstrategie hat, falls die Topologie auf X durch eine Metrik erzeugt wird.