Lösung der Bonus-Aufgabe auf Blatt 2

Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie $\mathcal{O}_S$, die durch die Intervalle $[a, b)$, $a < b \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *diskret bzgl.* $\mathcal{O}_S$, wenn es für jedes $d \in D$ eine $\mathcal{O}_S$-offene Umgebung (äquivalent, ein Intervall $[a, b)$) gibt, die keinen Punkt aus $D \setminus \{d\}$ enthält.

Wir zeigen zuerst:

Behauptung. Jede abzählbare lineare Ordnung $(L, \prec)$ lässt sich derart Ordnungstreu in $(\mathbb{R}, <)$ einbetten, sodass das Bild diskret bzgl. $\mathcal{O}_S$ ist.

Beweis. Es reicht, zu zeigen, dass sich $(\mathbb{Q}, <)$ derart Ordnungstreu in $(\mathbb{R}, <)$ einbetten lässt, sodass das Bild diskret bzgl. $\mathcal{O}_S$ ist. Mit Methoden aus der mathematischen Logik folgt, dass sich jede abzählbare lineare Ordnung in $(\mathbb{Q}, <)$ einbetten lässt und wir können die Einbettungen nacheinander ausführen.

Wir zeigen sogar, dass es möglich ist, sodass das Bild diskret bzgl. der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist (dies ist eine stärkere Aussage, denn, wenn (a, b) ist, sodass $D \cap (a, b) = \{d\}$, dann gilt auch $D \cap [d, b) = \{d\}$, also ist jede Menge, die diskret bzgl. $\mathcal{O}_S$ ist, auch diskret bzgl. der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

Die Idee ist die folgende: Gegeben eine rationale Zahl q, können wir $\mathbb{Q}$ ordnungstreu so in $\mathbb{R}$ einbetten, dass das Bild "bei q" diskret ist: Wir bilden alle $q' < q$ auf $q' - 1$ ab, q auf q und alle $q' > q$ auf $q' + 1$. Wir möchten diesen Prozess unendlich oft durchführen. Das Problem ist, dass dies nicht konvergieren würde (da der Grenzwert der Summe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ nicht definiert ist). Was wir allerdings tun können, ist, die Verschiebung immer kleiner zu machen (d.h. wir verschieben die erste Zahl um 1, die zweite um $\frac{1}{2}$, die dritte um $\frac{1}{4}$ und so weiter). Dann können wir einen Grenzwert bilden.

Insgesamt ergibt sich folgende Abbildung: Wir schreiben $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und bilden wie folgt ab:

$$f(q) := q + \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n < q} \frac{1}{2^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n > q} \frac{1}{2^n}$$

wir rechnen nach, dass f (1) wohldefiniert und (2) ordnungserhaltend ist sowie (3) ein diskretes Bild hat.

1. Dies ist klar. Die Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ konvergiert und ist strikt positiv, also konvergieren auch alle Teilsummen.

2. Es sei $q < q'$. Dann gilt, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n < q} \frac{1}{2^n} < \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n < q'} \frac{1}{2^n}$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n > q} \frac{1}{2^n} > \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n > q'} \frac{1}{2^n}$. Insgesamt ist $f(q) < f(q')$.

3. Dies ist die schwierigste Behauptung. Es sei $q = q_n \in \mathbb{Q}$. Wir behaupten, dass der Schnitt

$(f(q_n) - \frac{1}{2^n}, f(q_n) + \frac{1}{2^n}) \cap \operatorname{im}(f)$ genau $\{f(q_n)\}$ ist. Es sei $q < q'$, $q = q_l$, $q' = q_{l'}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(q') - f(q) &= (q' - q) + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n < q'} \frac{1}{2^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n < q} \frac{1}{2^n} \right) + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n > q} \frac{1}{2^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n > q'} \frac{1}{2^n} \right) \\ &= (q' - q) + \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n \in [q, q')} \frac{1}{2^n} + \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n \in (q, q']} \frac{1}{2^n} \\ &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n \in [q, q')} \frac{1}{2^n} + \sum_{n \in \mathbb{N}\ q_n \in (q, q']} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Diese Summe ist größer als jeder Summand und damit insbesondere größer als $\frac{1}{2^l}$ und $\frac{1}{2^{l'}}$ (da $q = q_l \in [q, q')$ und $q' = q_{l'} \in (q, q']$).

Dies impliziert unsere Behauptung: Es sei $q^* \in \mathbb{Q}$, $q^* \neq q_n$. Wenn $q^* < q_n$, folgt aus der Behauptung (mit $q = q^*$, $q' = q_n$), dass $f(q_n) - f(q^*) \geq \frac{1}{2^n}$. Wenn $q_n < q^*$, folgt aus der Behauptung (mit $q = q_n$, $q' = q^*$), dass $f(q^*) - f(q_n) \geq \frac{1}{2^n}$.

□

Nun machen wir die zweite Teilaufgabe:

Behauptung. Es gibt keine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, die überabzählbar und diskret bzgl. $\mathscr{O}_S$ ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass $D \subseteq \mathbb{R}$ diskret bzgl. $\mathscr{O}_S$ und überabzählbar ist. Das heißt insbesondere, dass es für jedes $d \in D$ ein $\epsilon_d > 0$ gibt, sodass $[d, d + \epsilon_d) \cap D = \{d\}$: Nach Annahme gibt es $a < b \in \mathbb{R}$, sodass $[a, b) \cap D = \{d\}$. Damit gilt aber insbesondere $[d, b) \cap D = \{d\}$ und wir können $\epsilon_d = b - d$ setzen.

Nun gilt allerdings, dass die Intervalle $[d, d + \epsilon_d)$ $[d', d' + \epsilon_{d'})$ für $d \neq d'$ disjunkt sind: OBdA sei $d < d'$. Dann würde aus $[d, d + \epsilon_d) \cap [d', d' + \epsilon_{d'}) \neq \emptyset$ folgen, dass $d' \in [d, d + \epsilon_d)$, ein Widerspruch (denn, wenn $d < x < d + \epsilon_d$ und $d' \leq x$, so gilt $d < d' < \epsilon_d$). Nun sei $f\colon D \to \mathbb{Q}$ eine Funktion, sodass $f(d)$ eine rationale Zahl aus $[d, d + \epsilon_d)$ sei. Damit ist f natürlich injektiv. Dies ist ein klarer Widerspruch zur Überabzählbarkeit von D. □