SEMINAR IM SOMMERSEMESTER 2026: STARKE HOMOLOGIEN, ABGELEITETE LIMITEN UND MENGENLEHRE

HEIKE MILDENBERGER

Vorbesprechung: am 27.1.2026 um 13:30 Uhr im Raum 313
Tutorat: Maxwell Levine
Zeit und Ort des Seminars: Di 16-18, SR 125 (wird erfahrungsgemäß auf Absprache mit den Teilnehmer(inne)n im Hochsommer zu einer anderen Zeit oder zumindest nicht an einem der Sonne zugewandten Ort gehalten)

Vorträge

Wir lesen die erste Hälfte (den Teil ohne Forcing) von Jeffrey Bergfalk, Chris Lambie-Hanson "The Cohomology of the Ordinals I: Basic Theory and Consistency Results" [2]. Dabei füllen wir Zitate aus Todorcevics "Walks on Ordinals and Their Characteristics" [20] und aus einführenden Büchern in die Homologische Algebra auf. Neben den Klassikern Cartan Eilenberg [4] sind das Mardešić [14] und Weibel [21]. Pdf-Dateien von Lehrbüchern über Homologietheorie gibt es auch von Hatcher [9], Hilton und Stammbach [10], Mac Lane [12], Rotman [18] und Spanier [19] und das kurze französische von Christian U. Jensen [11]. Zu den Garben (sheaves, faisceaux) kann man [3], [8] und [7] konsultieren. Diese kann man aus dem UB-Katalog mit Uni-Login herunterladen.

Auch die anderen Bücher findet man auf dem Internet.

Die Homologien der Todorcevic Walks $\varrho : \aleph_1 \times \aleph_1 \to A$, A abzählbar, werden mit ganz klassischen grundlegenden einstelligen Kohärenzen aber zweistelligen Unvereinbarkeiten begründet. Bergfalk und Lambie-Hanson erweitern Todorcevics Ergebnisse auf andere Kohärenzbegriffe.

Verwandt sind die Homologien des Hawaiischen Ohrrings, die auch nach der Kohärenz von Familien zweistelliger Funktion, diesmal auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, fragen. Die starke Homologie des Hawaiischen Ohrings wird in [13] in einfache Funktionenfamilien von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aus in abelsche Gruppen

Date: 19.1.2026.

übersetzt. Je nach Interesse können wir die Übersetzung, die zur sogenannten "Shape Theory" gehört, versuchen zu verstehen. In den Arbeiten [13] und [5] wird dann mithilfe von Familien von Funktionen die Homologie jeweils ausgerechnet. Die einfachen kombinatorischen Voraussetzungen, die Mardešić und Prasolov auf der einen Seite und Dow, Simon und Vaughan auf der anderen Seite nutzten, gehen über ZFC hinaus. Wir leiten das einfachere der beiden aus der Kontinuumshypothese her. Eine neue Arbeit, die die von Dow, Simon und Vaughan vorgestellte Situation des Verschwindens der Limiten ohne Rückgriff auf das Proper Forcing Axiom und nur mit der Konsistenzstärke von ZFC erzwingt, ist Bergfalk, Hrušák, Lambie-Hanson [1].

Interessante Ergebnisse aus den 1970er Jahren über Homologien von Familien endlichstelliger Funktionen auf den $\aleph_n$ gibt es in:

Rémi Goblot [6]
Barry Mitchell [15]
Barbara Osofsky [16]
Barbara Osofsky [17]

Literatur

[1] Jeffrey Bergfalk, Michael Hrušák, and Chris Lambie-Hanson. Simultaneously vanishing higher derived limits without large cardinals. *J. Math. Log.*, 23(1):Paper No. 2250019, 40, 2023.

[2] Jeffrey Bergfalk and Christ Lambie-Hanson. The Cohomology of the Ordinals I: Basic Theory and Consistency Results. *https://arxiv.org/abs/1902.02736*, 2019.

[3] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956.

[5] Alan Dow, Petr Simon, and Jerry E. Vaughan. Strong homology and the proper forcing axiom. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(3):821–828, 1989.

[6] Rémi Goblot. Sur les dérivés de certaines limites projectives. Applications aux modules. *Bull. Sci. Math. (2)*, 94:251–255, 1970.

[7] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.

[8] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[9] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[10] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[11] C. U. Jensen. *Les foncteurs dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs applications en théorie des modules*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[12] Saunders Mac Lane. *Homology.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1975 edition, 1995.
[13] S. Mardešić and A. V. Prasolov. Strong homology is not additive. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 307(2):725–744, 1988.
[14] Sibe Mardešić. *Strong shape and homology.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
[15] Barry Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Math.*, 8:1–161, 1972.
[16] Barbara L. Osofsky. *Homological dimensions of modules.* Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 12. American Mathematical Society, Providence, RI, 1973.
[17] Barbara L. Osofsky. The subscript of $\aleph_n$, projective dimension, and the vanishing of $\varprojlim^{(n)}$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:8–26, 1974.
[18] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*, volume 85 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1979.
[19] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1989. Corrected reprint of the 1966 original.
[20] Stevo Todorcevic. *Walks on Ordinals and Their Characteristics*, volume 263 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser, 2007.
[21] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994, https://www.sas.rochester.edu/mth/sites/doug-ravenel/otherpapers/weibel-homv2.pdf.

Text für das Modulhandbuch, 19.1.2026

Wir interessieren uns in diesem Seminar für kombinatorische Fragen, die gleichzeitig zur Algebra, zur Topologie und zur Mengenlehre gehören. Die Homologietheorie untersucht Strukturmerkmale mithilfe von Limeskonstruktionen aus Abbildungen in abelsche Gruppen, Moduln oder andere Referenzstrukturen. Oft gibt es ℕ-viele verschiedene Limites (die als Dimensionen gesehen werden können) und Verwandte von Projektionen oder Ableitungen (differentials) zwischen diesen. Bestimmte Quotientengruppen und Limiten sollen ausgerechnet werden oder es soll zumindest bestimmt werden, ob diese isomorph zur einelementigen Gruppe sind. Kompaktheitseigenschaften gerichteter Systeme von Strukturen können die Einelementigkeit eines solchen Quotienten nach sich ziehen. In diesem Seminar interessieren wir und für Strukturmerkmale von Familien zweistelliger Funktionen, wie sie zum Beispiel bei auf Hawaiischen Ohrringen basierenden Kettenkomplexen vorkommen. Überraschenderweise ist schon die Frage nach dem Verschwinden von $\lim^1$ unabhängig von ZFC.

Als Grundkenntnisse sind die einführende Topologievorlesung und die Definition von Ordinalzahl und Kardinalzahl nützlich. Manche Vorträge brauchen nur eines von beiden. Wir werden die benötigten Grundlagen aus der Algebraischen Geometrie und der Homologietheorie in den Vorträgen vorstellen.